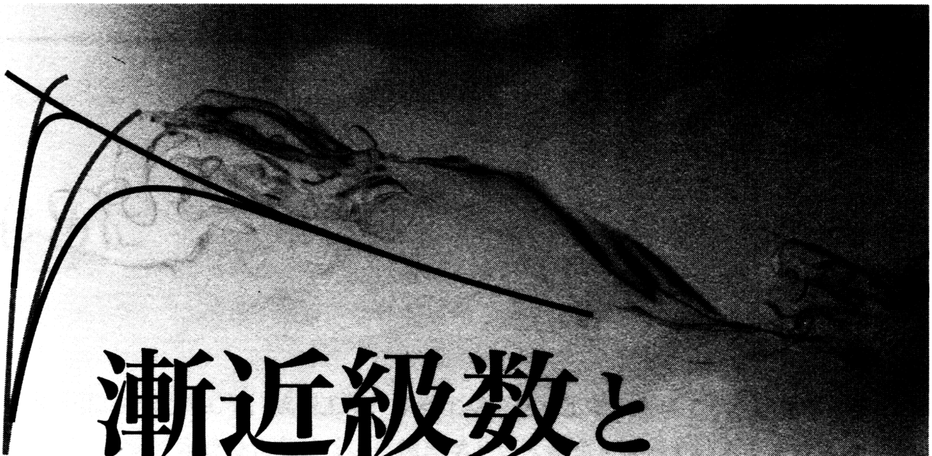
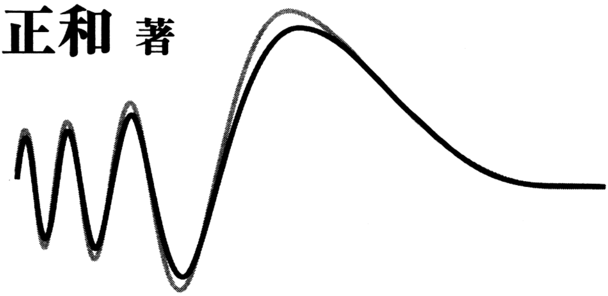


漸近級数と特異摂動法

微分方程式の体系的近似解法

柴田正和 著



森北出版株式会社

本書のサポート情報などをホームページに掲載する場合があります．下記のアドレスにアクセスしご確認ください．

http://www.morikita.co.jp/support

はじめに

電気・電子工学，機械工学，航空工学，船舶工学，建設工学，環境工学，建築学（構造計算）など，工学諸分野の大多数は応用物理学という側面をもっている．それらを支配する物理法則，さらに経済学・経営学・統計学・金融工学など社会科学の法則の多くは微分方程式という形で表現される．それゆえ，自然科学・工学・社会科学などの多くの問題を処理することは事実上微分方程式を解くことであるといえる．

ところが，微分方程式のうち解析的に**厳密解**を得ることができるものはごく限られている．1675 年，ライプニッツ（Leibniz）が最初の微分方程式を書き下した後，ほんの 100 年ほどの間にベルヌイ（Bernoulli）兄弟やリカッティ（Riccati）らにより，めぼしい微分方程式の解は調べ尽くされてしまったほどである．実際問題で遭遇する微分方程式の問題，特に非線形の境界条件，あるいは境界が移動する問題などでは厳密解を得ることはほとんど期待できない．

厳密解を期待できない微分方程式の解を探求するために，まず微分方程式の近似解法を検討することになる．その基本は 1-1 節で紹介する**摂動法**（perturbation method）である．事実，微小な係数を含む，あるいは導入することのできる微分方程式に関して摂動法は有力な手法である．しかし 1-2，1-3 節で紹介するように通常の摂動法の適用範囲は限定的である．そして，摂動法による近似解を諦めた学生・研究者はなすすべなく微分方程式の数値解を模索することになる．

実は，厳密解を得ることが期待できず，また通常の摂動法を適用することもできない微分方程式に関して，高精度の近似解を得る体系的方法，**特異摂動法**（singular perturbation methods）が存在する．微分方程式を解くいわば利用者の立場から特異摂動法を解説するのが本書の主目的である．

その特異摂動法による近似解はいずれも**漸近級数**（asymptotic series）である．そこで，まず第 2 部第 2 章で漸近級数の基礎理論を解説する．第 2 章は漸近級数というそれ自身独立した内容であるとともに，第 3 部の各近似解法の準備という性格をもつ．第 3 章では漸近級数の重要な応用例として，物理数学の主要テーマでもある，**部分積**

分，**ラプラス** (Laplace) **積分とラプラスの方法**，**フーリエ** (Fourier) **積分と停留位相法** (method of stationary phase)，**等位相法** (method of steepest descents)，すなわち積分を漸近級数展開するための諸手法を一通り説明する．最後に，3-5 節でその統計学および統計物理学への応用例を紹介する．

続いて第 3 部で，微分方程式の体系的近似解法である特異摂動法，すなわち相互に深く関連する一連の近似解法である第 4 章 **境界層理論** (boundary layer theory)・**漸近接続** (asymptotic matching)，第 5 章 **WKB 法**，第 6 章 **複スケール解析** (multiple scale analysis) を解説する．

これら諸手法を説明するに当たり，数学的形式論に拘泥することなく微分方程式を使用する読者の立場に立ち，手順を丁寧に説明したつもりである．特に，各近似解法の説明の後にその手法を用いた近似解と厳密解ないし数値解を比較しているので，読者はそれぞれの近似解法の有効性を視覚的に判断することができるだろう．

なお 4-1 節および 5-1 節で，後に広範な微分方程式の近似解法という地位を確立する，境界層理論および WKB 法の誕生の起源となった具体的な問題を流体力学および量子力学からそれぞれ一つずつ取り上げるが，その知識をもたないかあるいはその方面には関心がなく純粋に微分方程式の近似解法の習得を求める読者は，それぞれ 4-2 節，5-2 節から読み始めてかまわない．通常の摂動法の起源に関する 1-1 節の天文学の例題も同様である．

特異摂動法の応用例として，4-6 節，6-7 節で宇宙工学，4-7 節で流体力学の分野を概説した後，第 7 章で「海の波」の解析例をやや詳しく解説する．他分野一般の波ではその基本単位 (基本波) は正弦関数の波形をもち，通常，この正弦波から逸脱した非線形波を造るには大きなエネルギーを要する．レーザーを発生させる非線形光学がその例である．ところが，水の表面を伝播する波の場合には，基本波である正弦関数の波形を海岸付近で観察することは皆無であり，また造波器で実験水槽内に造り出すことも極めて難しい．つまり，水の波は本質的に複雑な波形を見せる上に，それが発生する水面自体が時間とともに動くので，その厳密解を得ることは非常に困難である．それゆえ，体系的な近似解を得る必要が生じ，特異摂動法による解析が発達した．その基礎理論といくつかの興味深い応用例を披露する．また海の波に関連して，音響工学と地震学への応用にもふれる．

厳密解・近似解を得ることのできない実地の問題，すなわち複雑な境界条件・初期条件をもつ微分方程式の解を得るためには，最終的には微分方程式を差分方程式 (差分法)・有限要素 (有限要素法) などを用いて離散変数の代数方程式で近似する数値解法

（数値シミュレーション）を採用せざるを得ない．その際，数値計算ソフト・プログラムの正確さ・精度の検証が十分に行われなければならないことは論を待たないが，特異摂動法は数値計算ソフトの検証を行うために，自明でない（nontrivial な）広範な問題に対する高精度の近似解を供給できる．したがって，数値シミュレーションを行う学生・研究者・実務者にとっても，微分方程式の体系的近似解法・特異摂動法を身につけることは非常に有用である．

巻末に，本書ならびに特異摂動法の解析に頻繁に現れる特殊関数の諸公式と，常微分方程式の厳密解を得る基本公式を掲げた．また，各章末の演習問題には詳細な解答を付して読者の便宜を図った．

本書の読者は，微分方程式論の基礎および中級，すなわち微分方程式の厳密解を得るための一般的手法を履修していることを期待している．さらに第 1 部第 1 章で概説する摂動論の知識があるならば，特異摂動法の価値をより深く認識することができるだろう．なお，3-3 節，3-4 節と 7-8 節に限り，さらに複素関数論の知識を前提とする．

2008 年 9 月

著　者

目　次

第1部

序

常微分方程式の一般的な解法を一通り学んだ学生諸君は，その方法自体は単純明快であるのにそれが活躍しうる微分方程式の種類が極端に少ないことに無力感をいだく．そして，実際問題で出会う興味ある微分方程式を解析的に（頭脳的に）解くことを諦め，数値計算といういわば筋肉労働に従事せざるを得ないことを自分自身に納得させようとする．

そのとき，天空（天体）から摂動法という一本の「蜘蛛の糸」が降りてくる．しかもそれは肉体労働へ転落しかけている非力な学生を支えうる，白く輝く強健な命綱のように見える．ところが …

第1章

微分方程式の基本的近似解法とその破綻

厳密解をもたない数多くの微分方程式の近似解を求める代表的方法は摂動法である．摂動法では，微分方程式の中の相対的に小さい項を無視することにより，厳密解の存在する，より簡単な微分方程式を得，これを出発点として逐次近似により近似解を求める．本章では，1-1 節で摂動法の起源を紹介しそれを微分方程式の近似解法へと一般化する．ところが，この有力な近似解法である摂動法にも適用限界がある．第 3 部で詳述する微分方程式の体系的近似解法・特異摂動法の誕生する伏線となる，摂動法が破綻する典型的な例を 1-2，1-3 節で紹介する．

1-1 摂動法

摂動という言葉は天文学にその起源がある．古代ギリシャ時代に花開いた西欧の数学・科学技術が 1600 年間という長期間休眠を続けた後，爆発的な発展を再開した 17 世紀初頭，ケプラー (Kepler) は諸惑星の軌道の精密な観測結果をもとに惑星運動に関する 3 法則を発見した．それ以来，太陽系の諸惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描くことが知られてきた．

ところが，その後観測技術の進歩に伴いさらに詳細に惑星運動を観測できるようになると，ほぼ太陽を焦点とする楕円軌道を描いている諸惑星が実は楕円軌道からほんの少しではあるがずれた動きを見せていることが次第に明らかになってきた．この楕円軌道から少し外れた惑星の運動を**摂動** (perturbation) と名づけたのである．容易に想像がつくように，摂動の原因は近隣の惑星による引力である．

次に，惑星の摂動を解析するための近似解法として開発され，それが代数方程式お

よび微分方程式の摂動法の起源となった，天体力学の摂動法を概説する．

万有引力を及ぼしあう二つの天体・**太陽と一つの惑星**の運動（二体問題）は厳密に解くことができ，惑星の軌道は（実際には太陽に一致するが厳密には）太陽と惑星の重心をする焦点とする楕円軌道となる．ところが，三つの天体すなわち**太陽と二つの惑星**の運動（三体問題）を求積法（quadratures）により解くことは不可能であることがポアンカレ（Poincaré）により証明されている．

そこで，太陽と二つの惑星の運動を近似的に解く方法を考える．話を具体的にするために，1846 年以前，太陽系の惑星として第 7 番目の天王星までが発見されていた当時を想定する．天王星の摂動の原因は，当然そのすぐ内側を回る土星であると考えられた（図 1-1）．

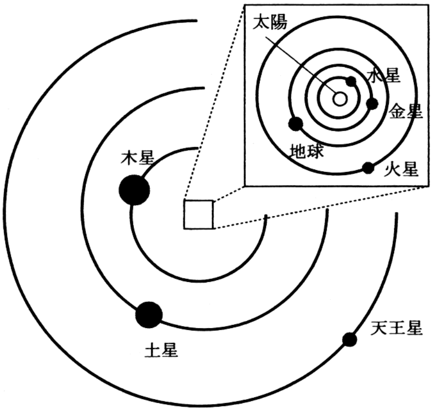


図 1-1　太陽系の惑星（1846 年当時）

太陽を含む三つの天体間で万有引力を及ぼしあうとき，天王星と土星の運動方程式は，それぞれ

$$m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = G m_1 m_0 \frac{\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{r}_1|^2} + G m_1 m_2 \frac{\boldsymbol{e}_{12}}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2} \tag{1-1-1}$$

$$m_2 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_2}{dt^2} = G m_2 m_0 \frac{\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{r}_2|^2} + G m_2 m_1 \frac{\boldsymbol{e}_{21}}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^2} \tag{1-1-2}$$

となる．ここに，$G = 6.67 \times 10^{-11} \mathrm{m}^3 / (\mathrm{kg \cdot s^2})$ は万有引力定数，m_0, m_1, m_2 はそれぞれ太陽，天王星，土星の質量，$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ はそれぞれ太陽を基準にした，天王星，土星の位置ベクトル，$\boldsymbol{e}_i$ は惑星 i から太陽に向かう方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{e}_{ij}$ は惑星 i から惑星 j に向かう方向の単位ベクトル $(i, j = 1,2)$ である．

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}_i|} \qquad (i = 1,2) \tag{1-1-3}$$

$$\boldsymbol{e}_{ij} = \frac{\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|} \qquad (i,j = 1,2) \tag{1-1-4}$$

天王星の運動方程式 (1-1-1) の右辺第 1 項は太陽による引力，第 2 項は土星による引力であり，また，土星の運動方程式 (1-1-2) の右辺第 1 項は太陽による引力，第 2 項は天王星による引力である．

両式の示すように，二つの天体間に働く引力の大きさは二つの天体の質量の積に比例し，二つの天体間の距離の 2 乗に反比例する．そこで，天王星の運動方程式 (1-1-1) の右辺第 1 項と第 2 項，すなわち天王星に及ぼす太陽と土星の引力の大きさを比較してみる．

土星の質量は太陽の 2.9×10^{-4} 倍 (1/3400) であり，天王星と土星が最も近づいたときの距離が約 1.5×10^9 km である．一方，天王星・太陽間の距離は最も離れたとき約 3×10^9 km である．したがって，天王星に働く土星の引力は，最大で天王星に働く太陽の引力の 1.2×10^{-3} 倍しかない．この，天王星に及ぼす太陽と土星の引力の大きさが著しく異なる，という事実を利用することにより，厳密解の存在しない天王星の運動方程式 (1-1-1) の極めて精度よい近似解を得ることができる．

■ A）摂動項を無視した微分方程式とその解

まず，運動方程式 (1-1-1,2) において右辺第 1 項の太陽の引力に比べて 1.2×10^{-3} 倍小さい右辺第 2 項の天王星・土星相互間の引力を無視すると次式を得る．

$$m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = G m_1 m_0 \frac{\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{r}_1|^2} \tag{1-1-5}$$

$$m_2 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_2}{dt^2} = G m_2 m_0 \frac{\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{r}_2|^2} \tag{1-1-6}$$

もとの三体問題の運動方程式 (1-1-1,2) から上の近似により二体問題の運動方程式となった微分方程式 (1-1-5,6) の解 $\boldsymbol{r}_1^{(0)}$, $\boldsymbol{r}_2^{(0)}$ はケプラーの法則による太陽を一つの焦点とする楕円軌道である．この近似を行うにあたり無視した隣接する惑星の引力は相対的に非常に小さいので，$\boldsymbol{r}_1^{(0)}$, $\boldsymbol{r}_2^{(0)}$ は厳密解 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ の非常によい近似であり，その小さな誤差が当面の興味の的となる**摂動**である．

■ B）摂動項内の未知関数を非摂動解で置き換える

次に天王星と土星のもとの方程式 (1-1-1,2) の右辺第 2 項（摂動項）において未知関数

$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ に A) で得た非摂動解 $\boldsymbol{r}_1^{(0)}, \boldsymbol{r}_2^{(0)}$ を代入することが許されるであろう．なぜならば，摂動項はもともと第 1 項（非摂動項）より 1.2×10^{-3} 倍も小さいので，$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ を $\boldsymbol{r}_1^{(0)}, \boldsymbol{r}_2^{(0)}$ で代用したことによる誤差は非摂動項の $(1.2 \times 10^{-3})^2 \cong 1.4 \times 10^{-6}$ 程度と，極めて小さいと考えられるからである．

$$m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = G m_1 m_0 \frac{\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{r}_1|^2} + G m_1 m_2 \frac{\boldsymbol{e}_{12}^{(0)}}{\left|\boldsymbol{r}_1^{(0)} - \boldsymbol{r}_2^{(0)}\right|^2} \tag{1-1-7}$$

$$m_2 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_2}{dt^2} = G m_2 m_0 \frac{\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{r}_2|^2} + G m_2 m_1 \frac{\boldsymbol{e}_{21}^{(0)}}{\left|\boldsymbol{r}_2^{(0)} - \boldsymbol{r}_1^{(0)}\right|^2} \tag{1-1-8}$$

式 (1-1-7,8) の摂動項の中の $\boldsymbol{r}_1^{(0)}, \boldsymbol{r}_2^{(0)}$ は既知関数であるから，これら二つの微分方程式はそれぞれ非斉次の二体問題であり，連立する必要なく個別に解くことができる．すなわち，式 (1-1-7) から天王星の軌道 $\boldsymbol{r}_1(t)$ を，また，式 (1-1-8) から土星の軌道 $\boldsymbol{r}_2(t)$ を得ることができる．こうして，太陽を焦点とする楕円軌道からの惑星たとえば天王星の軌道のずれ，すなわち摂動を極めて精度よく得る近似解法として**摂動法**が誕生した．

天王星より内側を公転する惑星たち，すなわち，水星・金星・地球・火星・木星・土星の摂動に関しては，この摂動法で得られた軌道の解は，実際に観測された軌道を十分精度よく再現することに成功していた．ところが，天王星の場合には，上記の**土星の引力を考慮した摂動法の解**と観測結果の間には無視できない隔たりが残ってしまった．その結果，それまで未発見だった新惑星の存在およびその質量と位置が予測され，1846 年太陽系第 8 惑星として海王星が発見されたという経緯がある．

以上が**摂動**という言葉とその名の冠せられた近似解法の起源である．

■ ［代数方程式の摂動法］

さて，天文学で誕生した摂動法を微分方程式の近似解法として一般化するに際して，摂動法の指導原理を理解するために，より簡単な代数方程式の近似解を摂動法で求めるのがよいであろう．

次の 5 次方程式

$$x = 1 + \varepsilon x^5 \tag{1-1-9}$$

の厳密解を得ることは困難である．しかし，もし ε が 1 に比べて無視しうるほど小さい

$$\varepsilon \ll 1 \tag{1-1-10}$$

という条件が満たされているならば，

$$x = 1 \tag{1-1-11}$$

は代数方程式 (1-1-9) の精度よい近似方程式であり，同時に近似解でもある．これが惑星の三体問題から二体問題への近似に対応する．すなわち，式 (1-1-9) から右辺第 2 項すなわち摂動項 εx^5 を無視することにより，解を得ることのできる近似式 (1-1-11) を導いたわけである．

摂動項 εx^5 の影響を取り入れたさらによい近似解を得るために，もとの式 (1-1-9) の摂動項 εx^5 の x に非摂動解 (1-1-11) を代入することが許されるであろう．なぜならば，摂動項はもともと第 1 項の 1 より十分小さいので，未知数 x を非摂動解 $x=1$ で代用したことによる誤差は非摂動項の ε^2 倍程度と，極めて小さいと考えられるからである．その結果，摂動項 εx^5 の影響を取り入れた 1 次近似解

$$x=1+\varepsilon \tag{1-1-12}$$

を得る．さらに精度の高い近似解を得るためには，1 次近似解 (1-1-12) をもとの式 (1-1-9) の摂動項 εx^5 に代入すればよい．このプロセスを体系的に行うために，代数方程式 (1-1-9) の解を微小パラメータ ε のベキ級数

$$x=1+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\varepsilon^3 x_3+\cdots \tag{1-1-13}$$

に展開し，その展開係数 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ を求めることにする．式 (1-1-13) をもとの代数方程式 (1-1-9) に代入すると，

$$1+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\varepsilon^3 x_3+\cdots=1+\varepsilon\left(1+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\varepsilon^3 x_3+\cdots\right)^5 \tag{1-1-14}$$

を得る．式 (1-1-14) を微小パラメータ ε のベキの等しい項ごとに整理すると，

$$1+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\varepsilon^3 x_3+\cdots=1+\varepsilon+5\varepsilon^2 x_1+\varepsilon^3\left(10x_1^2+5x_2\right)+\cdots$$

すなわち，

$$\varepsilon(x_1-1)+\varepsilon^2(x_2-5x_1)+\varepsilon^3\left(x_3-10x_1^2-5x_2\right)+\cdots=0 \tag{1-1-14a}$$

となる．式 (1-1-14a) はパラメータ ε の恒等式であるから，ε のすべての次数のベキの係数が 0 でなければならない．したがって，

$$x_1-1=0 \tag{1-1-15a}$$

$$x_2-5x_1=0 \tag{1-1-15b}$$

$$x_3-10x_1^2-5x_2=0 \tag{1-1-15c}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

と続く漸化式を得，これから解を ε のベキ級数に展開した係数 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ を

$$x_1=1 \tag{1-1-16a}$$

$$x_2=5x_1=5 \tag{1-1-16b}$$

$$x_3 = 10x_1^2 + 5x_2 = 35 \tag{1-1-16c}$$

…………

と順次求め，これらを式 (1-1-13) に代入することにより，5 次方程式 (1-1-9) の微小パラメータ ε によるベキ級数解

$$x = 1 + \varepsilon + 5\varepsilon^2 + 35\varepsilon^3 + \cdots \tag{1-1-17}$$

を任意の次数まで得ることができる．

摂動法は，代数方程式中に微小パラメータ ε を発見することさえできれば適用可能な極めて汎用的な近似解法である．さらに，たとえ微小パラメータ ε を発見することができない場合にも，方程式中の一つの項に形式的にパラメータ ε を乗じ，$\varepsilon \ll 1$ の仮定のもとに摂動展開を行い，その最終結果において $\varepsilon = 1$ とおく，という一見乱暴な方法が功を奏することすらある（演習問題 1-1-4）．

■ ［微分方程式の摂動法］

1 階非線形常微分方程式

$$y' + y + \varepsilon y^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{1-1-18}$$

を例にとり，微分方程式の一般的近似解法としての摂動法を概観する．

$\varepsilon \ll 1$ という条件の下では，

$$y' + y = 0, \quad y(0) = 1 \tag{1-1-19}$$

が微分方程式 (1-1-18) の精度のよい近似方程式であり，その解は

$$y = e^{-x} \tag{1-1-20}$$

である．

さて，摂動項 εy^2 の影響を取り入れたより高精度の近似解を得るために，もとの微分方程式 (1-1-18) の第 3 項（摂動項）εy^2 に非摂動解 (1-1-20) を代入することが許されるであろう．なぜならば，第 3 項はもともと第 1，2 項（非摂動項）より十分小さいので，解 y を非摂動解 $y = e^{-x}$ で代用したことによる誤差は第 1，2 項の ε^2 倍程度となり，極めて小さいと考えられるからである．その結果，摂動項 εy^2 の影響を取り入れた 1 次近似方程式は

$$y' + y + \varepsilon e^{-2x} = 0, \quad y(0) = 1 \tag{1-1-21}$$

となり，その解は

$$y = (1 - \varepsilon)e^{-x} + \varepsilon e^{-2x} \tag{1-1-22}$$

である（巻末付録 B-1 参照）.

さらに精度の高い近似解を得るためには，1 次近似解 (1-1-22) をもとの微分方程式 (1-1-18) の摂動項 εy^2 に代入すればよい．このプロセスを体系的に行うために，微分方程式 (1-1-18) の解を微小パラメータ ε のベキ級数

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \cdots \tag{1-1-23}$$

に展開し，その展開係数である関数 $y_1, y_2, y_3, \ldots$ を求めることにする．式 (1-1-23) をもとの微分方程式 (1-1-18) に代入すると，

$$\begin{aligned}&\left(y_0' + \varepsilon y_1' + \varepsilon^2 y_2' + \varepsilon^3 y_3' + \cdots\right) + \left(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \cdots\right)\\&+ \varepsilon\left(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \cdots\right)^2 = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad y(0) = 1\end{aligned} \tag{1-1-24}$$

を得る．式 (1-1-24) を微小パラメータ ε のベキの等しい項ごとに整理すると，

$$\begin{aligned}&\left(y_0' + y_0\right) + \varepsilon\left(y_1' + y_1 + y_0^2\right) + \varepsilon^2\left(y_2' + y_2 + 2y_0 y_1\right)\\&+ \varepsilon^3\left(y_3' + y_3 + y_1^2 + 2y_0 y_2\right) + \cdots = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad y(0) = 1\end{aligned} \tag{1-1-24a}$$

となる．式 (1-1-24a) はパラメータ ε の恒等式であるから，ε のすべての次数のベキの係数は 0 でなければならない．したがって，

$$y_0' + y_0 = 0, \quad y_0(0) = 1 \tag{1-1-25a}$$

$$y_1' + y_1 + y_0^2 = 0, \quad y_1(0) = 0 \tag{1-1-25b}$$

$$y_2' + y_2 + 2y_0 y_1 = 0, \quad y_2(0) = 0 \tag{1-1-25c}$$

$$y_3' + y_3 + y_1^2 + 2y_0 y_2 = 0, \quad y_3(0) = 0 \tag{1-1-25d}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

と続く漸化式を得る．これから順次，解を微小パラメータ ε のベキ級数 (1-1-23) に展開した係数 $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$

$$y_0 = e^{-x} \tag{1-1-26a}$$

$$y_1 = -e^{-x} + e^{-2x} \tag{1-1-26b}$$

$$y_2 = e^{-x} - 2e^{-2x} + e^{-3x} \tag{1-1-26c}$$

$$y_3 = -e^{-x} + 3e^{-2x} - 3e^{-3x} + e^{-4x} \tag{1-1-26d}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

を得る（巻末付録 B-1 参照）.

これらを式 (1-1-23) に代入することにより，微分方程式 (1-1-18) の微小パラメータ ε によるベキ級数解

$$y = e^{-x} - \varepsilon e^{-x}\left(1 - e^{-x}\right) + \varepsilon^2 e^{-x}\left(1 - e^{-x}\right)^2 - \varepsilon^3 e^{-x}\left(1 - e^{-x}\right)^3 + \cdots \tag{1-1-27}$$

を任意の次数まで得ることができる．

一方，変換

$$y(x) = \frac{z'(x)}{\varepsilon z(x)} \tag{1-1-28}$$

を施すことにより，$y(x)$ の微分方程式 (1-1-18) は $z(x)$ の微分方程式

$$z''(x) + z'(x) = 0 \tag{1-1-29}$$

に変換される．これより直ちに微分方程式 (1-1-18) の厳密解

$$y = \frac{e^{-x}}{1 + \varepsilon(1 - e^{-x})} \tag{1-1-30}$$

を得る．

摂動法による近似解 (1-1-27) と厳密解 (1-1-30) を比較すると，近似解は厳密解を微小パラメータ ε によりベキ級数展開したものであることがわかる．

この例から，微分方程式中になんらかの微小パラメータを見出すことさえできれば，摂動法により近似解を得ることができそうである．実際，その**微小パラメータ**がどれほど小さくなければならないという制限があるわけではなく，詭弁と映るかもしれないが 1 を 1 より**ずっと小さい**とみなした上で議論を推し進め成功する場合すらある（演習問題 1-1-4 参照）．簡単な例を挙げるならば，$(1+\varepsilon)^n \cong 1 + n\varepsilon$ という近似式は元来 $\varepsilon \ll 1$ の条件の下に成立すべきものだが，たとえば $n = 0.5$ のとき，$\varepsilon = 1$ という大きな値に対してもその相対誤差は 6％ にすぎず，十分よい近似値を与える．

$$(1+\varepsilon)^n = \sqrt{2} \cong 1.414, \quad 1 + n\varepsilon = 1.5$$

また，$\sin x \cong x$ という近似式は元来 $x \ll 1$ の条件の下で導かれたものだが，$x = \pi/6$ という値に対してもその相対誤差は 5％ 未満でしかない．

$$\sin \pi/6 = 0.5, \quad \pi/6 \cong 0.52$$

さらにたとえば 2-1 節，5-4 節においては，逆に $x \to +\infty$ あるいは $n \to +\infty$ の極限で成り立つべく導かれた近似式が，x あるいは n が 1 付近のごく小さな値まで含む広い区間において成立する近似式になっている例を発見するであろう．

1-2　摂動法の破綻I　永年項問題

前節の結果から，摂動法は解析的に厳密解を得ることができない微分方程式の高精度の近似解を得る一般的方法として有望であると期待される．ところが，具体例に即して摂動法を試みると，振動現象などの幅広い問題において**永年項**（secular terms）の出現という形の破綻が生ずることが明らかになる．独立変数の定義域全体にわたり一様に成立する**通常の摂動展開**（regular perturbation）に対して，近似解が漸近級数として一様性を満たさないものを**特異摂動展開**（singular perturbation）と呼ぶ（2-3-4 項）が，永年項の出現は特異摂動展開の第一のタイプである．

■［保存系調和振動子］

次の 2 階線形常微分方程式すなわち**単振動**の微分方程式を考えよう．なお，本節では独立変数を時間とみなすと理解しやすいのでこれを t と書くことにする．

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y=0 \tag{1-2-1}$$

微分方程式 (1-2-1) はあらゆる振動現象の基礎方程式である．すなわち，摩擦・抵抗の無視できるバネ（m：質点の質量，y：質点のつりあいの位置からの変位，k：バネ定数，図 1-2）の運動方程式

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky \tag{1-2-2}$$

において

$$\omega^2=k/m \tag{1-2-3}$$

とおいたものが式 (1-2-1) に一致するし，また，コンデンサー・コイル交流回路（L：交流回路のコイル・インダクタンス，Q：コンデンサーに蓄えられた電荷，C：コンデン

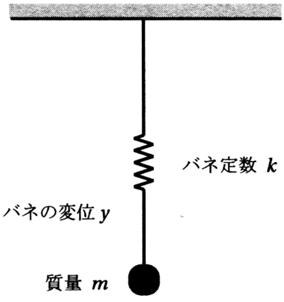


図 1-2　抵抗なしのバネ

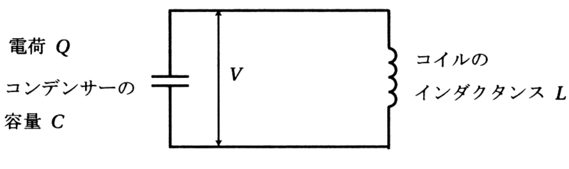


図 1-3　コンデンサー・コイル交流回路

サーの容量，図 1-3）の電圧つりあいの式

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}=-\frac{1}{C}Q \tag{1-2-4}$$

において

$$\omega^2=1/(LC) \tag{1-2-5}$$

とおき，Q を y に置き換えたものが式 (1-2-1) に一致する（[13]）．

このエネルギー散逸のない保存系の一般解は調和関数である．

$$y=A\exp(i\omega t)+B\exp(-i\omega t) \tag{1-2-6a}$$

（複素数表示，A,B は積分定数）

あるいは

$$y=A\cos(\omega t+\alpha) \tag{1-2-6b}$$

（実数表示，A,α は積分定数）

実数表示は関数の意味を理解するのに便利である一方，後に非線形項が現れ積の演算を行うにあたっては複素数表示が圧倒的に便利であるので，本節では両者を併記しておく．

■ ［散逸系調和振動子］

次のステップとして，この保存系に微小なエネルギー散逸が加わった非保存系を考察する．

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=-2\varepsilon\omega\frac{dy}{dt}\quad(\omega>0)\qquad\varepsilon\to0+ \tag{1-2-7}$$

なお，$\varepsilon\to0+$ の記号は新たに加えた散逸項の係数 $2\varepsilon\omega$ が正の側から 0 に近づく極限を考えることを意味する．

式 (1-2-7) は，バネ（図 1-2）の場合には，式 (1-2-2) に速度に比例する抵抗力が付け加わったもの（γ：質点の速度に比例する抵抗力の抵抗係数，図 1-4）

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky-\gamma\frac{dy}{dt} \tag{1-2-8}$$

に対応する．すなわち，式 (1-2-8) において

$$2\varepsilon\omega=\gamma/m \tag{1-2-9}$$

とおけば式 (1-2-7) を得る．

また，コンデンサー・コイルの交流回路（図 1-3）の場合には，式 (1-2-4) に電気抵抗 R が付け加わったもの（図 1-5）

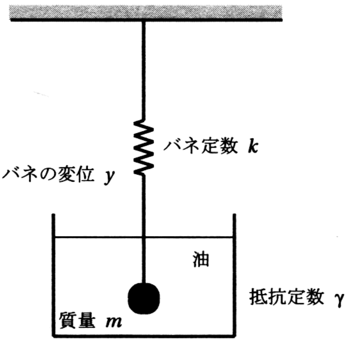


図 1-4　摩擦抵抗の加わったバネ

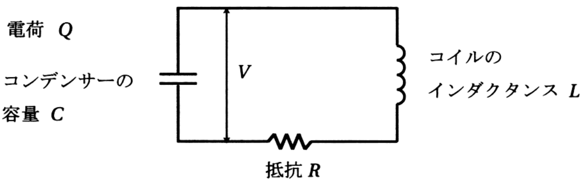


図 1-5　電気抵抗の加わった交流回路

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{C}Q - R\frac{dQ}{dt} \tag{1-2-10}$$

に対応する．すなわち，式 (1-2-10) において

$$2\varepsilon\omega = R/L \tag{1-2-11}$$

とおけばやはり式 (1-2-7) を得る（[13]）．

■［摂動法］

ε が微小量であることを利用して，微分方程式 (1-2-7) の摂動法による近似解を求める．なお，この微分方程式 (1-2-7) には ε の大きさの制約なしに厳密解（一般解）

$$y_e = A\exp\left[\left(-\varepsilon\omega + i\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)t\right] + B\exp\left[\left(-\varepsilon\omega - i\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)t\right] \tag{1-2-12a}$$

（複素数表示，A, B は積分定数）

あるいは

$$y_e = A\exp(-\varepsilon\omega t)\cos\left(\omega t\sqrt{1-\varepsilon^2} + \alpha\right) \tag{1-2-12b}$$

（実数表示，A, α は積分定数）

が存在する．この散逸系の解 (1-2-12a,b) と保存系の解 (1-2-6a, b) を比較すると，微小係数 ε すなわち摂動項の影響は調和関数の周波数と振幅両方に現れていることがわかる．特に振幅が時間とともに小さくなる**減衰振動**という特徴が，摂動項の存在により初めて出現していることは注目すべきである（図 1-6）．

この散逸系の厳密解 (1-2-12a,b) と対比すると，以下で求めてゆく近似解の意味が理解しやすいであろう．

さて，摂動法の手順に従い，まず微分方程式 (1-2-7) の解を ε のベキ級数に展開する．

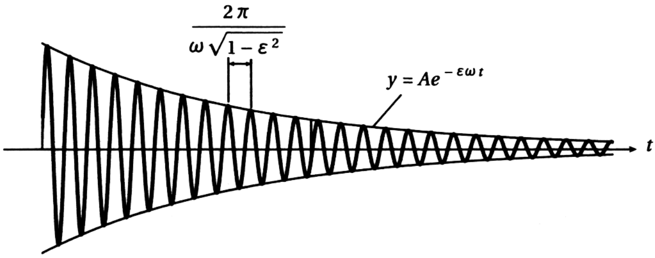


図 1-6　減衰振動（式 (1-2-12b)）

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots \tag{1-2-13}$$

ここに，$y_0, y_1, y_2, \ldots$ はいずれも同程度の大きさの量である．

式 (1-2-13) を式 (1-2-7) に代入し，ε の次数の等しい項をまとめると，

$$y_0'' + \omega^2 y_0 = 0 \tag{1-2-14}$$

$$y_1'' + \omega^2 y_1 = -2\omega y_0' \tag{1-2-15}$$

$$y_2'' + \omega^2 y_2 = -2\omega y_1' \tag{1-2-16}$$

…………

と無限に続く漸化式を得る．ここに，記号 プライム（prime：′）は独立変数 t による微分を表す．

摂動項を含まない式 (1-2-14) の一般解は式 (1-2-6a,b) であるから，これらを式 (1-2-15) に代入すると，それぞれ

$$y_1'' + \omega^2 y_1 = -2i\omega^2 \left[A\exp(i\omega t) - B\exp(-i\omega t)\right] \tag{1-2-17a}$$

（複素数表示，A, B は積分定数）

および

$$y_1'' + \omega^2 y_1 = 2\omega^2 A\sin(\omega t + \alpha) \tag{1-2-17b}$$

（実数表示，A, α は積分定数）

となる．

式 (1-2-17a,b) の右辺には，摂動項を含まない斉次方程式 (1-2-14) の一般解である式 (1-2-6a,b) と等価な関数が現れている．したがって，摂動の一次の微分方程式 (1-2-17a,b) では，固有振動数 ω をもつ振動系に，その固有振動数 ω に等しい振動数の外力を加えていることになる．すなわち，この微分方程式は**共鳴**（resonance）現象を記述するものになっている．

したがって，式 (1-2-17a,b) の解 y_1 はそれぞれ，

$$y_1 = -\omega t[\,A\exp(+i\omega t) + B\exp(-i\omega t)\,] \tag{1-2-18a}$$

（複素数表示）

および

$$y_1 = -\omega t A\cos(\omega t + \alpha) \tag{1-2-18b}$$

であり，いずれも時間 t とともに限りなく増大し続ける**永年項** (secular terms) となる（解法は巻末付録 B-3 参照）．これは厳密解である式 (1-2-12a,b) の表す減衰振動解とは著しく異なる，むしろ正反対の性質である．この**永年項の出現**が摂動法の破綻，すなわち特異摂動展開（特異摂動問題）の第一のタイプである．

厳密解と比べることができるこの例題では，永年項の出現が摂動法の破綻を意味していることは一目瞭然であるが，厳密解を得ることができない微分方程式の場合にも，多くのケースにおいて「その解に永年項が出現してはならない」ことを示すことができる．

具体例を取り上げるのがわかりやすいので，前出の微分方程式 (1-2-8) をさらに一般化した次式を考察する．

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dV(y)}{dy} = -\gamma\frac{dy}{dt} \qquad (\gamma \geq 0) \tag{1-2-19}$$

ここに，$V(y)$ はポテンシャル（位置）エネルギーである．

さて，式 (1-2-19) の両辺に dy/dt を乗ずると

$$m\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{dV(y)}{dy}\frac{dy}{dt} = -\gamma\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \tag{1-2-20a}$$

となり，これを次の**保存形**に変形することができる．

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + V(y)\right] = -\gamma\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \tag{1-2-20b}$$

式 (1-2-20b) の左辺カギカッコ内の第 1 項は運動エネルギー，第 2 項はポテンシャルエネルギーであり，その和

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + V(y) \tag{1-2-21}$$

は力学的全エネルギーであるから，微分方程式 (1-2-20b) の左辺は力学的全エネルギーの時間変化率を表す．式 (1-2-20b) の右辺は非正値であるから，力学的全エネルギーは増大しないことを示している．特に，$\gamma = 0$ の系は力学的全エネルギーの保存系である．

これにより，力学的全エネルギー (1-2-21) はその初期値

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2_{t=0} + V(y)_{t=0} \tag{1-2-22}$$

より大きくならないので，$V(y)$ の具体的表式に即して y および dy/dt が有界であることを示しうることが多い．このような系の解に永年項が出現することは，解の**有界性**という基本的性質に反するのである．

なお，微分方程式 (1-2-7) の解の摂動展開 (1-2-13) において永年項は 1 次の項にとどまらず，続くすべての項に出現する．

すなわち，式 (1-2-16a,b) の y_1 を式 (1-2-16) に代入すると，それぞれ

$$y_2 = \left[\frac{1}{2}(\omega t)^2 - \frac{1}{2}i\omega t\right] A\exp(+i\omega t) + \left[\frac{1}{2}(\omega t)^2 + \frac{1}{2}i\omega t\right] B\exp(-i\omega t) \tag{1-2-23a}$$

および

$$y_2 = \frac{1}{2}(\omega t)^2 A\cos(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2}\omega t A\sin(\omega t + \alpha) \tag{1-2-23b}$$

を得るが，これらは，時間 t ないしその 2 乗に比例する永年項である．

さて，ここまでに得た摂動展開の第 3 項までをまとめると，それぞれ

$$\begin{aligned} y &= A\exp(+i\omega t) + B\exp(-i\omega t) - \varepsilon\omega t[\,A\exp(+i\omega t) + B\exp(-i\omega t)\,] \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}(\varepsilon\omega t)^2 - \frac{1}{2}i\varepsilon^2\omega t\right] A\exp(+i\omega t) + \left[\frac{1}{2}(\varepsilon\omega t)^2 + \frac{1}{2}i\varepsilon^2\omega t\right] B\exp(-i\omega t) \end{aligned} \tag{1-2-24a}$$

および

$$\begin{aligned} y &= A\cos(\omega t + \alpha) - \varepsilon\omega t A\cos(\omega t + \alpha) \\ &\quad + \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega t A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2}(\varepsilon\omega t)^2 A\cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \tag{1-2-24b}$$

となり，摂動法により ε のベキ級数に展開した近似解の各項 $y_i(i = 1,2,\ldots)$ はそれぞれ永年項になっていることがわかる．

その原因は既述のように，解を摂動展開した各項 $y_i(i = 1,2,\ldots)$ の満たすべき微分方程式 (1-2-15),(1-2-16),... の右辺にその左辺の斉次方程式の解が現れたために，本来の微分方程式の記述する現象が共鳴現象ではないにもかかわらず，系と外力が共鳴して系のエネルギーが限りなく増大することになってしまったからである．

摂動法に出会い，厳密解の得られない広汎な微分方程式に対する近似解を得る可能性に光明を見出した初学者諸君は，この永年項問題に直面し再び落胆させられてしまうのが通例である．この段階に留まっている読者のためにその解決法を与えるのが本書の目的の一つである．

ところで，なぜ摂動法はこの微分方程式の近似解を求めるのに失敗したのであろうか？ それをみるために，式 (1-2-24a,b) 内の各項を次のようにまとめ直してみる．

$$y = A\left(1-\varepsilon\omega t+\frac{1}{2}(\varepsilon\omega t)^2-\frac{1}{2}i\varepsilon^2\omega t\right)\exp(+i\omega t)$$
$$+B\left(1-\varepsilon\omega t+\frac{1}{2}(\varepsilon\omega t)^2+\frac{1}{2}i\varepsilon^2\omega t\right)\exp(-i\omega t) \qquad (1\text{-}2\text{-}25a)$$

$$y = A\left(1-\varepsilon\omega t+\frac{1}{2}(\varepsilon\omega t)^2\right)\cos(\omega t+\alpha)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\omega t A\sin(\omega t+\alpha) \qquad (1\text{-}2\text{-}25b)$$

対応する厳密解 (1-2-12a,b) と比較すると，摂動法による解 (1-2-25a,b) は指数関数 $\exp(-\varepsilon\omega t)$ および余弦関数 $\cos\left(\omega t\sqrt{1-\varepsilon^2}+\alpha\right)$ を ε でテイラー級数展開していることがわかる．

$$\exp\left[\left(-\varepsilon\omega+i\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)t\right]=\exp(-\varepsilon\omega t)\exp\left(i\omega t\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)$$
$$\exp(-\varepsilon\omega t)=1-\varepsilon\omega t+(-\varepsilon\omega t)^2/2+\cdots$$
$$\exp\left(i\omega t\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)=\exp(i\omega t)-\frac{1}{2}i\varepsilon^2\omega t\exp(i\omega t)+\cdots$$
$$\cos\left(\omega t\sqrt{1-\varepsilon^2}+\alpha\right)=\cos(\omega t+\alpha)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\omega t\sin(\omega t+\alpha)+\cdots \qquad (1\text{-}2\text{-}26)$$

つまり，摂動法により ε のベキ級数に展開した近似解を求めようとした結果，厳密解中に含まれる指数関数や三角関数を ε のベキ級数に展開することになり，それが時間 t のベキに比例する永年項を生み出したのである．

それゆえ，摂動展開による解は短い時間に限るならば厳密解のよい近似になっている．厳密解 y_e (1-2-12b) と摂動展開 (1-2-25b) による，それぞれ非摂動解 y_0，1次近似解 $y_0+\varepsilon y_1$，2次近似解 $y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2$ を図 1-7 で比較する（$A=1, \varepsilon=0.1, \omega=2\pi, \alpha=0$）．

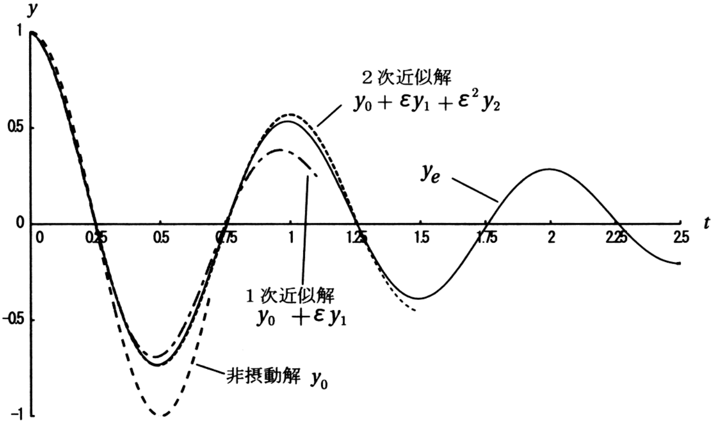


図 1-7　厳密解 y_e と有限項の近似解との比較

非摂動解 y_0 は周期（$=1$）の 1/4 程度まで，1次近似解 $y_0+\varepsilon y_1$ は周期の 3/4 程度まで，2次近似解 $y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2$ は周期の 5/4 程度まで厳密解のよい近似になっている．

したがって，もしこの摂動法により ε のベキ級数に展開した近似解の無限級数の和をすべて足し合わせることができるならば永年項ではなくなるはずである．しかし，実際には有限項の和をとることしかできない．

この事実から，有限項の和が厳密解をよく近似することができるよう「摂動法の精神を踏襲しつつ近似解の展開の仕方に工夫を加える」新たな方法の可能性を予感させる．第 6 章「複スケール解析 (multiple scale analysis)」でその解決法が示される．

1-3　摂動法の破綻 II　構造的特異摂動問題

振動現象を取り扱う微分方程式の摂動展開を試みると永年項問題という破綻が生ずることを前節で示したが，それとは別にこれまで述べてきた通常の摂動法を適用することが原理的 (構造的) に不可能な一連の微分方程式が存在する．

それは，1-1 節の方法に従い微小係数 ε による摂動展開による微分方程式の近似解を求めようとしたとき，その微分方程式中の微小係数 ε を 0 とおいたものと，同じ問題において微小係数 $\varepsilon \to 0$ の極限をとったものが本質的に異なる場合である．この第二のタイプの特異摂動問題を**構造的特異摂動問題**と呼ぶ．構造的特異摂動問題の解は $\varepsilon = 0$ において不連続である．

■ [代数方程式の構造的特異摂動問題]

1-1 節において，摂動展開により 5 次方程式

$$x = 1 + \varepsilon x^5 \qquad \text{(1-1-9 再掲)}$$

の近似解を得ることができた．しかし，それは 5 次方程式 (1-1-9) の五つの解のうち，$\varepsilon \to 0$ の極限で $x \to 1$ となる一つの解だけである．すなわち，5 次方程式 (1-1-9) において ε を 0 とおいた 1 次方程式

$$x = 1 \qquad \text{(1-1-11 再掲)}$$

では残りの四つの解は消え去っている．一方，5 次方程式 (1-1-9) において $\varepsilon \to 0$ の極限をとったものは依然として 5 次方程式であるから五つの解をもつ．

つまり，5 次方程式 (1-1-9) を解く問題においては，その式中の微小係数 ε を 0 とおいたものと，同じ問題において微小係数 $\varepsilon \to 0$ の極限をとったものとが質的に異なる．すなわち，この問題は構造的特異摂動問題である．第 2 章の漸近級数に関する理論を習得した後にこの特異摂動問題を解くことにする (2-4 節)．

■ ［微分方程式の構造的特異摂動問題］

微分方程式の最高階の導関数に微小係数εがかかっている場合も構造的特異摂動問題である．なぜならば，最高階の導関数に微小係数εがかかっている微分方程式において$\varepsilon=0$とおくと，微分方程式の階数が一つ下がり，もとの微分方程式において$\varepsilon\to 0$の極限をとったものと**質的**に異なる微分方程式になるからである．

その一つの表れが，階数が一つ下がった微分方程式は本来の微分方程式が満足すべき境界条件のうち一つを満足できなくなることである．たとえば流体力学において，ナヴィエ-ストークス（Navier-Stokes）方程式の最高階（2階）の微分すなわち粘性項を無視すると，水底および側壁境界において満足すべき**速度＝0**という**ノンスリップ条件**を満足できなくなる（4-1節）．

すなわち，もとの微分方程式の中で$\varepsilon=0$とおいたときの解は，もとの微分方程式が記述する現象とは質的に異なるものを表現するので解の摂動展開の出発点として不適当なのである．したがって，最高階の導関数に微小係数εがかかっている微分方程式，すなわち構造的特異摂動問題の近似解を求めるためには通常の摂動法を用いることは原理的に不可能であり，これとは全く異なる手法**特異摂動法**が必要になる．

第3部「特異摂動法」で解説する，境界層理論・漸近接続（第4章）とWKB法（第5章）は，このような最高階の導関数に微小係数εがかかっている微分方程式の近似解（漸近級数解）を得るための体系的近似解法であり，複スケール解析（第6章）は特異摂動問題を解くためのより一般的方法である．

構造的特異摂動問題の微分方程式の解は，$\varepsilon\to 0$に伴いある区間において急激に変動するという性質がある．$\varepsilon\to 0$の極限でこの区間の幅が0に近づくときこの区間は境界層と呼ばれ，微分方程式の近似解を得るために境界層理論を用いる．一方，$\varepsilon\to 0$の極限でこの区間の幅が有限の大きさに留まるときには，その微分方程式の近似解を得るためにはWKB法を用いなければならない．

後述するように，線形微分方程式に限定するならば境界層理論はWKB法の一つの特殊例とみることができるが，境界層理論が非線形微分方程式にも適用できる方法であるのに対して，WKB法は線形微分方程式だけにしか適用できないという一面がある．

なお，境界層は流体の水底および側壁境界付近に実在し，これに関するBoundary-layer theory（境界層理論）という流体力学の古典的な名著もある（[16]）．また，WKB法は元来，量子力学においてプランク（Plank）定数hが小さいことを利用して開発された近似解法である．それゆえ一般に，境界層理論といえば流体力学固有のもの，またWKB法といえば量子力学固有のものと理解されているきらいがあるが，上記のよ

うに，境界層理論と WKB 法は実は広汎な微分方程式の体系的近似解法なのである．

複スケール解析（第 6 章）は通常の摂動法において永年項が現れる振動現象の問題に対して特に有効な方法であると同時に，境界層問題・WKB 法問題を含む広範な特異摂動問題を処理することのできる汎用的な特異摂動法である．

第 1 章の演習問題（式番号は本文中のもの）

1-1　代数方程式

1-1-1　2 次方程式

$$x^2 - 1.01x + 0.01 = 0$$

の摂動法による近似解を摂動展開の 2 次の項まで求め，厳密解と比較せよ．

1-1-2　3 次方程式

$$x^3 - 1.01x + 0.01 = 0$$

の摂動法による近似解を摂動展開の 2 次の項まで求め，厳密解と比較せよ．

1-1-3　無理方程式

$$\sqrt{x^2 + \varepsilon} = e^x - 1 \qquad \varepsilon \to 0+$$

に実数解があることを示し，この解の摂動展開の 2 次の項までを求めよ．

1-1-4　微小係数をもたない代数方程式

2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の第 2 項に仮に ε を乗じた方程式 $x^2 - \varepsilon x - 1 = 0$ において $\varepsilon \ll 1$ として 4 次近似解を求め，その解の中で $\varepsilon = 1$ とした値と厳密解を比較せよ．

1-2　微分方程式

1-2-1　1 階常微分方程式の初期値問題

$$y'(x) + \varepsilon q(x) y(x) = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad y(0) = 1$$

の摂動法による近似解を求め，厳密解（巻末付録 B1-3,4）

$$y(x) = \exp\left(-\varepsilon \int_0^x q(t)\,dt\right)$$

と比較せよ．

1-2-2　2 階常微分方程式の初期値問題

$$y'' + y + \varepsilon y^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \qquad \varepsilon \to 0+$$

の摂動法による近似解の 2 次の項までを求めよ．

1-3　通常の摂動法の破綻

1-3-1　y^3 に比例する摂動項をもつダフィン（Duffing）方程式

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y + \varepsilon y^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{6-3-1}$$

の通常の摂動法による近似解を求めようとすると，永年項が現れることを確かめよ．

1-3-2　2階線形微分方程式の境界値問題

$$\varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad p(x) > 0, \quad y(0) = C, y(1) = D \qquad \varepsilon \to 0+ \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

の通常の摂動法による近似解を求めようとすると，変域の両端における境界条件を双方ともに満足することができないことを確かめよ．

第2部

漸近級数

数学は本来，基礎から順序立てて知見を積み上げてゆく論理的学問である．ところが，漸近級数というテーマに関しては，その基礎理論の説明抜きに物理数学・統計学など応用分野の文献に積分の漸近級数展開などの記述が現れることが多い．

本書では，第 2 章で漸近級数展開をさまざまな分野で応用するための準備として漸近級数の基礎理論を解説する．続いて第 3 章で，漸近級数展開の重要な応用例である積分の漸近級数展開をやや詳しく解説する．これは統計物理学を学ぶ道具としての物理数学の重要な部分を占める．

なお，第 3 部で解説する微分方程式の特異摂動法はいずれも特異摂動問題に対する一様に成立する漸近級数解を求める手法である．

第2章

漸近級数

まず，2-1 節で漸近級数の実用的側面すなわち，無限級数としては発散する漸近級数の有限項をとることによりその級数が漸近する関数の値を精度よく評価できることを紹介する．次に 2-2 節で，漸近級数の基礎理論を記述するための準備として，漸近関係と関数の相対的大きさに関する記号を導入する．それを受け，2-3 節で漸近級数を定義しその諸性質を収束級数と対比しつつ明らかにする．これらの準備が整った後，第 3 部で取り扱う「微分方程式の特異摂動法」の前触れとして，2-4 節で代数方程式の特異摂動問題を解く．

2-1 漸近級数の実用的側面 —関数の値を精度よく評価する

後に 2-3-2 項で正確な定義を述べるが，漸近級数は多くの場合，発散する無限級数である．これまで，無限級数は収束する場合にのみ意味をもつものと理解してきた初学者には，発散する級数がいかなる意味をもち，さらにはどのように役立つものか想像し難いかもしれない．そこで，漸近級数の詳細な説明に先立ち，まず漸近級数の実用的側面を紹介しておこう．

繰り返しになるが，厳密解を得ることのできる微分方程式は限られている．その中でも初等関数の陽関数表示の形で解を得る例はさらに少なくなる．厳密解と呼ばれるものの多くは，何回もの変数変換を経た後に漸くより簡単な (すでに解かれている) 微分方程式に帰着する．また，ある場合 (4-5 節例題) には解は媒介変数表示で与えられる．当然ながら，解が積分表示で与えられる例も非常に多い．つまり，独立変数の値を代入するだけで解である関数の値およびその定性的性質を見極めることはほとんど

の場合不可能である，これらの関数値を評価するために漸近級数展開は有効である．次の例でそれをみてゆこう．

1754 年（宝暦 4 年）といえば日本では徳川九代将軍家重の御世，黒船来航に遡ること 100 年の太平の世を貪っていたころであるが，西洋ではスイス生まれの数学者オイラー（Leonhard Euler）*1 が積分表示型の関数

$$f(x) = x\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{x+t}dt \tag{2-1-1}$$

において変数 x が正の大きな値をとるときの値を評価する方法を考察していた．

式 (2-1-1) は右辺の被積分関数が，$t<x$ であれば，

$$\frac{x}{x+t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{x^n} \tag{2-1-2}$$

と級数展開できることを用い，さらにガンマ関数の公式（巻末付録式 (A3-1,3) 参照）

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n! \tag{2-1-3}$$

に注意すると，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{x^n} \tag{2-1-4}$$

と級数展開できる．因みに，式 (2-1-4) において変数 x をその逆数で置き換えたもの

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! x^n \tag{2-1-5}$$

はスティルチェス（Stieltjes）級数と呼ばれる有名な級数である（演習問題 2-1-2）．

ところで，式 (2-1-4) の展開の $n+1$ 項の n 項に対する比 $-n/x$ の絶対値が $n\to+\infty$ の極限で無限大になるので，級数 (2-1-4) は変数 x のすべての値に対して**発散**する級数である．

さて，式 (2-1-2) の右辺を

$$\frac{x}{x+t} = \sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n t^n}{x^n} + \frac{(-1)^{k+1}t^{k+1}}{x^k(x+t)} \tag{2-1-6}$$

と書き換えることにより，無限級数 (2-1-4) を初めの $n=k$ 項までの有限級数とその残差 R_k との和に分割することができる．

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n n!}{x^n} + R_k \tag{2-1-7}$$

ここに残差 R_k は

$$R_k = \int_0^\infty \frac{(-1)^{k+1}t^{k+1}e^{-t}}{x^k(x+t)}dt \tag{2-1-8}$$

*1 2007 年が生誕 300 年にあたる．

である．

式 (2-1-2) の代わりに式 (2-1-6) を用いたので，無限等比級数の収束条件 $t<x$ に関する読者の懸念も解消するであろう．

さて，次の不等式

$$|R_k| < \left| \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+1}} \int_0^\infty t^{k+1} e^{-t} dt \right| = \left| \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \right| \tag{2-1-9}$$

が示すように（巻末付録 A3-1 参照），変数 x の値にかかわらず残差 R_k の絶対値はもとの無限級数を式 (2-1-7) の右辺第 1 項すなわち $n=k$ 項までの有限級数で打ち切ったときに切り捨てた最初の項（$n=k+1$）の絶対値 $\left| \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \right|$ を超えることがない，しかも $|x|$ を十分大きくとることにより $|R_k|$ をいくらでも小さくできる，という注目すべき性質をもっている[*1]．

この性質を有する無限級数を**ポアンカレの意味の漸近級数**または**狭義の漸近級数**と呼ぶ．そして，この性質こそが漸近級数により関数を評価するためのキーポイントである．すなわち，実用上次のようにして漸近級数からもとの関数の値を高精度で評価することができるのである．

表 2-1 は $f(x)$ (2-1-7) の級数展開の各項 $(-1)^n n!/x^n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ を $x=5,8,10,15,20$ についてそれぞれ計算したものである．x の値にかかわらず，項番号 n がふえてゆくに従い級数の項の値の絶対値は初め急激に小さくなるが，ある項番号を境に急激に大きくなり発散級数の傾向を顕著にする．これが発散する漸近級数の一般的特徴である．

さて，x のそれぞれの値について級数の項の絶対値が最小になる項番号 n を探すと，それらは表に太字で示したように，$x=5$ では $n=4$ と 5，$x=8$ では $n=7$ と 8，$x=10$ では $n=9$ と 10，$x=15$ では $n=14$ と 15，$x=20$ では $n=19$ と 20 である．この級数の特殊性（隣り合う 2 項の比が $-n/x$）により，絶対値が最小になる項がたまたま常に隣り合う二つになっている．これらの番号 n を上述の打ち切り項の次の項 $k+1$ に選ぶならば，もとの関数 (2 -1-1) を式 (2-1-7) の第 1 項の形の有限級数で評価するときの残差の絶対値 $|R_k|$ を最小にすることができる．

表 2.2 は同じ $x=5,8,10,15,20$ に対応する展開式 (2-1-7) の第 k 項目までの級数和を計算したものである．

---

*1 漸近級数のこの性質から「収束する交代級数を有限項での打ち切るとき，打ち切った次の項の絶対値が誤差の上限を与える」という事実を連想する読者もあるだろう．

表 2-1 関数 (2-1-1) の漸近級数展開 (2-1-7) の第 n 項目の値 $(-1)^n n!/x^n$

n	$x=5.0$	8.0	10.0	15.0	20.0
0	0.100E+01	0.100E+01	0.100E+01	0.100E+01	0.100E+01
1	−0.200E+00	−0.125E+00	−0.100E+00	−0.667E-01	−0.500E-01
2	0.800E-01	0.313E-01	0.200E-01	0.889E-02	0.500E-02
3	−0.480E-01	−0.117E-01	−0.600E-02	−0.178E-02	−0.750E-03
4	**0.384E-01**	0.586E-02	0.240E-02	0.474E-03	0.150E-03
5	**−0.384E-01**	−0.366E-02	−0.120E-02	−0.158E-03	−0.375E-04
6	0.461E-01	0.275E-02	0.720E-03	0.632E-04	0.113E-04
7	−0.645E-01	**−0.240E-02**	−0.504E-03	−0.295E-04	−0.394E-05
8	0.103E+00	**0.240E-02**	0.403E-03	0.157E-04	0.158E-05
9	−0.186E+00	−0.270E-02	**−0.363E-03**	−0.944E-05	−0.709E-06
10	0.372E+00	0.338E-02	**0.363E-03**	0.629E-05	0.354E-06
11	−0.817E+00	−0.465E-02	−0.399E-03	−0.461E-05	−0.195E-06
12	0.196E+01	0.697E-02	0.479E-03	0.369E-05	0.117E-06
13	−0.510E+01	−0.113E-01	−0.623E-03	−0.320E-05	−0.760E-07
14	0.143E+02	0.198E-01	0.872E-03	**0.299E-05**	0.532E-07
15	−0.428E+02	−0.372E-01	−0.131E-02	**−0.299E-05**	−0.399E-07
16	0.137E+03	0.743E-01	0.209E-02	0.319E-05	0.319E-07
17	−0.466E+03	−0.158E+00	−0.356E-02	−0.361E-05	−0.271E-07
18	0.168E+04	0.355E+00	0.640E-02	0.433E-05	0.244E-07
19	−0.638E+04	−0.844E+00	−0.122E-01	−0.549E-05	**−0.232E-07**
20	0.255E+05	0.211E+01	0.243E-01	0.732E-05	**0.232E-07**
21	−0.107E+06	−0.554E+01	−0.511E-01	−0.102E-04	−0.244E-07
22	0.471E+06	0.152E+02	0.112E+00	0.150E-04	0.268E-07
23	−0.217E+07	−0.438E+02	−0.259E+00	−0.230E-04	−0.308E-07
24	0.104E+08	0.131E+03	0.620E+00	0.369E-04	0.370E-07
25	−0.520E+08	−0.411E+03	−0.155E+01	−0.614E-04	−0.462E-07
26	0.271E+09	0.133E+04	0.403E+01	0.106E-03	0.601E-07
27	−0.146E+10	−0.450E+04	−0.109E+02	−0.192E-03	-0.811E-07
28	0.818E+10	0.158E+05	0.305E+02	0.358E-03	0.114E-06
29	−0.475E+11	−0.571E+05	−0.884E+02	−0.692E-03	−0.165E-06

表 2-2　関数 (2-1-1) の漸近級数展開 (2-1-7) の第 k 項目までの和 $\sum_{n=0}^{k}(-1)^n n!/x^n$

k	$x=5.0$	8.0	10.0	15.0	20.0
0	0.100E+01	0.100E+01	0.100E+01	0.100E+01	0.100E+01
1	0.800E+00	0.875E+00	0.900E+00	0.933E+00	0.950E+00
2	0.880E+00	0.906E+00	0.920E+00	0.942E+00	0.955E+00
3	**0.832E+00**	0.895E+00	0.914E+00	0.940E+00	0.954E+00
4	**0.870E+00**	0.900E+00	0.916E+00	0.941E+00	0.954E+00
5	0.832E+00	0.897E+00	0.915E+00	0.941E+00	0.954E+00
6	0.878E+00	**0.899E+00**	0.916E+00	0.941E+00	0.954E+00
7	0.814E+00	**0.897E+00**	0.915E+00	0.941E+00	0.954E+00
8	0.917E+00	0.899E+00	**0.916E+00**	0.941E+00	0.954E+00
9	0.731E+00	0.897E+00	**0.915E+00**	0.941E+00	0.954E+00
10	0.110E+01	0.900E+00	0.916E+00	0.941E+00	0.954E+00
11	0.285E+00	0.896E+00	0.915E+00	0.941E+00	0.954E+00
12	0.225E+01	0.902E+00	0.916E+00	0.941E+00	0.954E+00
13	−0.285E+01	0.891E+00	0.915E+00	**0.941E+00**	0.954E+00
14	0.114E+02	0.911E+00	0.916E+00	**0.941E+00**	0.954E+00
15	−0.314E+02	0.874E+00	0.915E+00	0.941E+00	0.954E+00
16	0.106E+03	0.948E+00	0.917E+00	0.941E+00	0.954E+00
17	−0.361E+03	0.790E+00	0.913E+00	0.941E+00	0.954E+00
18	0.132E+04	0.115E+01	0.920E+00	0.941E+00	**0.954E+00**
19	−0.506E+04	0.301E+00	0.908E+00	0.941E+00	**0.954E+00**
20	0.205E+05	0.241E+01	0.932E+00	0.941E+00	0.954E+00
21	−0.867E+05	−0.313E+01	0.881E+00	0.941E+00	0.954E+00
22	0.385E+06	0.121E+02	0.993E+00	0.941E+00	0.954E+00
23	−0.178E+07	−0.317E+02	0.735E+00	0.941E+00	0.954E+00
24	0.863E+07	0.997E+02	0.136E+01	0.941E+00	0.954E+00
25	−0.434E+08	−0.311E+03	−0.196E+00	0.941E+00	0.954E+00
26	0.227E+09	0.102E+04	0.384E+01	0.941E+00	0.954E+00
27	−0.123E+10	−0.348E+04	−0.705E+01	0.941E+00	0.954E+00
28	0.695E+10	0.123E+05	0.234E+02	0.941E+00	0.954E+00
29	−0.405E+11	−0.449E+05	−0.650E+02	0.940E+00	0.954E+00

不等式 (2-1-9) の示すように，表 2.1 の各項の値の絶対値がその前の項までの級数和（表 2-2）により関数を評価したときの誤差の上限であるから，関数 (2-1-1) の $x=5,8,10,15,20$ における値を最も精度よく求めるためには，それぞれ $x=5$ では $n=3$ または 4 までの和，$x=8$ では $n=6$ または 7 までの和，$x=10$ では $n=8$ または 9 までの和，$x=15$ では $n=13$ または 14 までの和，$x=20$ では $n=18$ または 19 までの和を取るべきである．

以上の方法で関数 (2-1-1) を漸近級数展開により評価した数値とその誤差の上限を表 2.3 に示す．変数 x の値が増加するとともにその精度は飛躍的に向上する．

表 2-3　関数 (2-1-1) の漸近級数展開 (2-1-7) による評価

	$x=5.0$	8.0	10.0	15.0	20.0
計算値 (項数)	0.870(5)	0.897(8)	0.915(10)	0.941(15)	0.954(20)
誤差上限	0.0384	0.00240	0.000363	0.299E-05	0.232E-07
相対誤差	0.044	0.00267	0.000397	0.318E-05	0.243E-07

なお，ポアンカレの意味の漸近級数の条件 (2-1-9) を満たさない（広義の）漸近級数の場合にも，後に 2-3-2 項に現れる定義式 (2-3-6) から明らかなように，漸近級数の第 $k+1$ 項の絶対値が漸近級数を第 k 項までで打ち切ったときの級数和の**誤差の目安**となる．それゆえ，一般に発散する漸近級数で表現された関数の値を評価するときには，各項の値の絶対値を調べその最小値（第 $k+1$ 項）を探し，その直前の項（第 k 項）までの有限級数を用いる．この方法を**最適漸近近似法**（optimal asymptotic approximation）と呼ぶ．

次に，漸近級数展開がその関数を数値評価するために非常に有用であることを示す例をもう一つ挙げよう．

本書において，これ以降「$x\to+\infty$ あるいは $n\to+\infty$ における漸近級数展開」という表現がしばしば現れるが，初学者には無限大の極限において成立する式に積極的な意味を見出すことは難しいかもしれない．ところが，以下の諸例で明らかになるように，$x\to+\infty$ あるいは $n\to+\infty$ の極限において成立するものとして導かれた結果が，x あるいは n が 1 付近の小さな値まで含む広い区間において成立することがしばしば実現するのを知り，驚くことだろう．

[0 次の第 1 種ベッセル関数 $J_0(x)$ の数値評価]

0 次の第 1 種ベッセル (Bessel) 関数 $J_0(x)$ を数値評価する問題が第二の例である.

x の絶対値が小さい場合には $x=0$ のまわりのベキ級数展開を用いて $J_0(x)$ を数値評価する. 第 1 種ベッセル関数のベキ級数展開 (A1-2a) において $\nu=0$ とおくと,

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2/4)^n}{(n!)^2}=1-\frac{x^2/4}{(1!)^2}+\frac{(x^2/4)^2}{(2!)^2}-\frac{(x^2/4)^3}{(3!)^2}-\cdots \tag{2-1-10}$$

を得る. $J_0(x)$ は解析関数であるから, 級数展開 (2-1-10) を用いることにより**原理的には**任意の x の値に対して $J_0(x)$ の数値を得ることができる. ところが, 計算機の桁落ちやオーバーフローなどの技術的問題があり, 絶対値が 10 を超える x の値について $J_0(x)$ の数値を得ることは実際上困難である.

そこでもう一方の極限である, $J_0(x)$ の $x\to+\infty$ における漸近級数展開を用いる. 式 (A1-7,9,10) において $\nu=0$ とおくと,

$$J_0(x)=\sqrt{2/(\pi x)}\{(P(0,x)\cos(x-\pi/4)-Q(0,x)\sin(x-\pi/4)\} \tag{2-1-11}$$

$$P(0,x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(0,2k)}{(2x)^{2k}}=1-\frac{1\cdot 9}{2!(8x)^2}+\frac{1\cdot 9\cdot 25\cdot 49}{4!(8x)^4}-\cdots \tag{2-1-12}$$

$$Q(0,x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(0,2k+1)}{(2x)^{2k+1}}=-\frac{1}{8x}+\frac{1\cdot 9\cdot 25}{3!(8x)^3}-\cdots \tag{2-1-13}$$

を得る. ここに $(0,2k)$ はハンケルの記号

$$(0,2k)=\frac{\Gamma(1/2+2k)}{[(2k)!\Gamma(1/2-2k)]} \tag{2-1-14}$$

である.

図 2-1 は $J_0(x)$ のベキ級数展開 (2-1-10) において $n=10$ 項まで残したものと, 漸近級数展開 (2-1-11) の係数 (2-1-12) において $k=3$ 項まで, また式 (2-1-13) において $k=4$ 項まで残したものを比較している. 図で両者による計算結果が一致している区間では双方が精度よい数値を与えている.

ベキ級数展開 (点線) では $x=0$ から $x=7$ 付近まで関数値の精度を保っている一方, 漸近級数展開 (実線) は $x\to+\infty$ からはるかに小さい $x=1.5$ 付近まで精度のよい関数値を与えている.

両者の守備範囲が重複するので, これら二つの公式を併用することにより x の任意の値に対して $J_0(x)$ の数値を評価することができる. とりわけ, 漸近級数展開式 (2-1-11,12,13) の適用範囲の広いことに注目すべきである.

以上, 漸近級数が数値計算上極めて有用であるという, その実用的な側面について述べた. ところで, 以下の各章において明らかになるように, 通常の摂動法で近似解

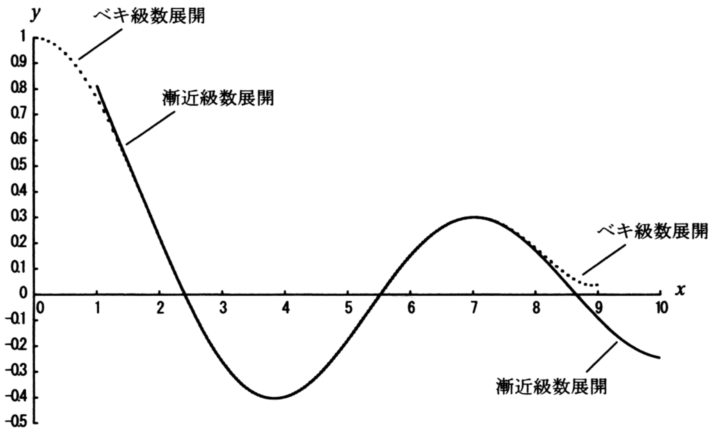


図 2-1　0 次の第 1 種ベッセル関数 $J_0(x)$ のベキ級数展開（点線）と漸近級数展開（実線）による数値評価

を得ることのできない特異摂動問題を解くために開発された特異摂動法の近似解はすべて漸近級数である．その準備のために本章の次節以降で漸近級数の定義，基本的性質および取扱法について説明する．特に，微分方程式の近似解としての漸近級数の一様性が破れる場合が特異摂動問題であることを指摘する．

2-2　漸近関係と関数の相対的大きさに関する記号

厳密解をよく近似する関数を近似解と呼ぶのであるから，厳密解と近似解の差（の絶対値）は厳密解（の絶対値）に比べてはるかに小さくなくてはならない．前節で関数 (2-1-1) の値と，それを漸近級数 (2-1-7) の第 k 項まで残した近似式で評価した値との相対誤差が 1 に比べてはるかに小さかったのはその一例である．

したがって，近似解を求めるためには二つの関数の大きさ（の絶対値）を相互に比較するという作業が頻出する．そこで，二つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の相対的大きさに関する記号を導入し，その性質をまとめておく．

本書においては，特別に断らない限り独立変数 x, t などは実数とする．その関数も基本的に実数値をとるが，第 1 章において述べたように実数解を求めるためにあえて複素数の関数を用いる方がより便利なこともあるので，必要に応じ複素数値をとるものとする．

まず，$f(x)$ と $g(x)$ が次の関係にあるとき，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{2-2-1}$$

「$x \to x_0$ の極限において（あるいは単に「$x \to x_0$ のとき」），$f(x)$ は $g(x)$ より（はるかに）小さい（$g(x)$ は $f(x)$ より（はるかに）大きい）」といい，これを

$$f(x) \ll g(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-2-2a}$$

または

$$g(x) \gg f(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-2-2b}$$

と表記する．式 (2-2-1) が意味するところから明らかなように，式 (2-2-2a,b) の大小関係は $f(x)$ および $g(x)$ の正負の符号を無視した絶対値に関する記述であることを銘記されたい．

したがって，

$$x \ll -1 \qquad x \to 0+ \tag{2-2-3}$$

は左辺は正，右辺は負であるが，正しい命題である．

さらに，不等式 (2-2-2a,b) と同じ命題を**オーダー記号**（または**ランダウ**（Landau）**記号**）o を用いて

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \qquad x \to x_0 \tag{2-2-4}$$

と表記することもあり，これを「$f(x)$ は $g(x)$ より小さなオーダーである」と読む．

たとえば，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が存在するとき，$f(x)$ の微分 $df(x)$ と x の微分 dx の関係式は，

$$df(x) \equiv f(x+dx) - f(x) = f'(x)dx \tag{2-2-5a}$$

であるが，$f(x)$ の差分 $\Delta f(x)$ と x の差分 Δx の関係は

$$\Delta f(x) \equiv f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \qquad \Delta x \to 0 \tag{2-2-5b}$$

というオーダー記号を含む式である．

次に，$f(x)$ と $g(x)$ が

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{2-2-6}$$

すなわち，

$$f(x) - g(x) \ll g(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-2-7}$$

という関係にあるとき，「$x \to x_0$ のとき（の極限において），$f(x)$ は $g(x)$ に**漸近する**」といい，これを

$$f(x) \sim g(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-2-8a}$$

または

$$g(x) \sim f(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-2-8b}$$

と表記する．式 (2-2-8a,b) のように記号 $\sim$ で結ばれた関係式を**漸近関係式**と呼ぶ．

さらに，$f(x)$ と $g(x)$ が $x = x_0$ の近傍で，x によらないある正の定数 K について，

$$|f(x)/g(x)| \le K \tag{2-2-9}$$

という関係を満たすとき，すなわち，その比が有界であるとき，「$x \to x_0$ のとき，$f(x)$ は $g(x)$ のオーダーである」といい，これを大文字のオーダー記号 O を用いて

$$f(x) = O(g(x)) \qquad x \to x_0 \tag{2-2-10}$$

と表記する．たとえば，

$$\sin x = O(x) \qquad x \to 0 \tag{2-2-11a}$$

$$e^x = 1 + x + O(x^2) \qquad x \to 0 \tag{2-2-12a}$$

であるが，一方，**漸近関係**の記号 $\sim$ を用いると，これらの関数はそれぞれ，

$$\sin x \sim x \qquad x \to 0 \tag{2-2-11b}$$

$$e^x \sim 1 + x + x^2/2 \qquad x \to 0 \tag{2-2-12b}$$

と書き表すことができる．

なお，

$$x^2 \sim 0 \qquad x \to 0$$

とするのは誤りであることに注意しなければならない．なぜならば，漸近関係の記号 $\sim$ の定義により，恒等的に 0 である以外のいかなる関数も 0 に漸近しないからである．

また，後の章において，微小パラメータ $\varepsilon \ll 1$ を用いて，「$O(\varepsilon)$ の大きさの変数区間にわたり関数値が $O(1)$ 変化する」場合，その関数を「急激に変動する関数」と呼び，一方，「$O(1)$ の大きさの変数区間にわたり関数値が $O(1)$ 変化する」場合，その関数を「ゆるやかに変動する関数」と呼ぶことになる．

以下に，オーダー記号に関する公式をまとめておく．なおすべての式において $(x \to x_0)$ を省略する．また，オーダー記号 O を o に置き換えたものも同様に成立する．

$f_m(x) = O\left(g_m(x)\right)$，$a_m$: 定数 $(m = 1, 2, \ldots, k)$ のとき，

$$\sum_{m=1}^{k} a_m f_m(x) = O\left(\sum_{m=1}^{k} |a_m| \left|g_m(x)\right|\right) \tag{2-2-13}$$

$f_m(x) = O\left(g_m(x)\right)$，$a_m$定数, $\left|g_m(x)\right| \le g(x) \quad (m = 1, 2, \ldots, k)$ のとき，

$$\sum_{m=1}^{k} a_m f_m(x) = O\left(g(x)\right) \tag{2-2-14}$$

$f_m(x) = O\big(g_m(x)\big) \quad (m = 1,2,\ldots,k)$ のとき，

$$\prod_{m=1}^{k} f_m(x) = O\left(\prod_{m=1}^{k} g_m(x)\right) \tag{2-2-15}$$

$f(x) = O\big(g(x)\big)$，$\alpha > 0$ のとき，

$$|f(x)|^{\alpha} = O\big(|g(x)|^{\alpha}\big) \tag{2-2-16}$$

$f(x) = O\big(g(x)\big)$ かついずれも積分可能ならば，

$$\int_x^{x_0} f(t)dt = O\left(\int_x^{x_0} |g(t)|\, dt\right) \tag{2-2-17}$$

が，それぞれ成立する．

■ ［複素関数の漸近関係］

ここまで実変数の実関数に限定して説明を続けてきたが，本節を閉じるにあたり複素平面上で定義された複素関数の漸近関係にふれておく．

複素関数 $f(z)$，$g(z)$ の漸近関係を実関数の場合と同様に，

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1 \tag{2-2-6 再掲}$$

であるとき,「$z \to z_0$ のとき，$f(z)$ は $g(z)$ に漸近する」すなわち，

$$f(z) \sim g(z) \qquad z \to z_0 \tag{2-2-8a 再掲}$$

と，$z \to z_0$ に接近する複素平面上の径路を全く限定することなしに定義することはできない．例えば，

$$\begin{aligned} f(z) \equiv \exp(1/z) + \exp(-1/z) &\sim \exp(1/z) \qquad z \to 0 \quad (-\pi/2 < \arg z < \pi/2) \\ &\sim \exp(-1/z) \qquad z \to 0 \quad (\pi/2 < \arg z < 3\pi/2) \end{aligned} \tag{2-2-18}$$

であり，$z \to 0$ に接近する径路の方向（偏角）により $f(z)$ の漸近する関数 $g(z)$ は異なるからである．

一般に，複素関数の漸近関係 $f(z) \sim g(z), z \to z_0$ を定めるためには，$z \to z_0$ に接近する径路の偏角 $\arg(z - z_0)$ を限定する必要がある．その例は巻末付録 A「特殊関数」の複素関数としての漸近級数展開式に数多くみることができる．

2-3 漸近級数展開

2-3-1 漸近関数列

関数を漸近級数に展開するとき，その基底となるのが漸近関数列 (asymptotic sequences) である．関数列が漸近関数列であるためには，次の条件を満さなければならない．

すなわち，関数列 $\{\varphi_m(x)\}$ がすべての m について

$$\varphi_{m+1}(x) = o\big(\varphi_m(x)\big) \qquad x \to x_0 \tag{2-3-1}$$

であるとき，これを**漸近関数列**であるという．

漸近関数列には次のような関数列がある．

$$\big\{(x-x_0)^m\big\} \qquad x \to x_0 \tag{2-3-2}$$

$$\big\{(x-x_0)^{m/5}\big\} \qquad x \to x_0 \tag{2-3-3}$$

$$\big\{\sin^m(x-x_0)\big\} \qquad x \to x_0 \tag{2-3-4}$$

$$\big\{x^{-m}\big\} \qquad x \to +\infty \tag{2-3-5}$$

漸近関数列の任意の部分列もまた漸近関数列である．

2-3-2 漸近級数の定義

2-1 節で**ポアンカレの意味の漸近級数**であるための条件に言及したが，ここで**広義の漸近級数**の定義を述べる．

漸近関数列 $\{\varphi_m(x)\}$ により展開した級数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(x)$ がすべての k について

$$y(x) - \sum_{m=0}^{k} a_m\varphi_m(x) \ll \varphi_k(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-3-6}$$

の条件を満たすとき，すなわち，級数を第 $k+1$ 項 $(m=k)$ で打ち切ったときの残差が残した最終項より小さなオーダーであるとき，級数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(x)$ は $y(x)$ の漸近級数であるといい，

$$y(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-3-7}$$

と表記する．

なお，式 (2-3-6) による漸近級数の定義を

$$y(x) - \sum_{m=0}^{k} a_m\varphi_m(x) \sim a_K\varphi_K(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-3-8}$$

で置き換えることもできる．ここに a_K は a_k の後最初に現れる 0 でない係数である．

■［漸近ベキ級数］

最も頻繁に現れる漸近級数，すなわち漸近関数列 $\{(x-x_0)^m\}$ によるベキ級数展開の具体例を示そう．

ベキ級数 $\sum_{m=0}^{k} a_m(x-x_0)^m$ が $y(x)$ のテイラー級数 $a_m = \dfrac{y^{(m)}(x_0)}{m!}$ であれば，自動的にすべての k について

$$y(x) - \sum_{m=0}^{k} a_m(x-x_0)^m = \frac{y^{(k+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} \ll (x-x_0)^k$$

$$(0<\theta<1) \quad x \to x_0 \qquad \text{(2-3-6a)}$$

の条件を満たす．したがって，テイラー級数 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m$ は $y(x)$ の漸近級数であり，

$$y(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m \qquad x \to x_0 \qquad \text{(2-3-7a)}$$

と表記する．

$x \to +\infty$ の場合には，漸近関数列 $\{x^{-m}\}$ によるベキ級数展開を用いる．

$$y(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{-m} \qquad x \to +\infty \qquad \text{(2-3-7b)}$$

ポアンカレの意味の漸近級数（狭義の漸近級数）の定義は，条件 (2-3-6) に「級数を第 k 項までで打ち切ったときの誤差が変数 x のすべての値について切り捨てた最初の項 $(n=k+1)$ の絶対値を超えない」という条件

$$\left| y(x) - \sum_{m=0}^{k} a_m\varphi_m(x) \right| < \left| a_{k+1}\varphi_{k+1}(x) \right| \qquad \text{(2-3-6b)}$$

を付け加えたものである．

漸近級数の第1項を**主要部**（leading term，leading behavior）と呼ぶ．また，主要部の中で最も急激に変動する因子を**支配因子**（controlling factor）と呼ぶ．たとえば，エイリー関数の漸近級数展開

$$Ai(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{-n} \qquad z \to \infty \quad (|\arg z| < \pi)$$

$$c_0 = 1, \quad c_n = \frac{\Gamma(3n+1/2)}{54^n n! \Gamma(n+1/2)} \quad (n = 1,2,3,\ldots) \qquad \text{（巻末付録 A5−3）}$$

において，主要部は

$$Ai(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \qquad z \to \infty \quad (|\arg z| < \pi)$$

であり，支配因子は $\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right)$ である．

2-3-3 漸近級数の性質

漸近級数は以下に説明する諸性質を有する．収束級数と対比して理解することが望ましい．

[収束級数との関係]

まず，読者が慣れ親しんできたであろう収束級数と漸近級数を比較しておく．

関数 $y(x)$ を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ の形にテイラー級数展開し第 k 項までとったときの残差をこれまでより詳細に，

$$R_k(x,x_0)=y(x)-\sum_{n=0}^{k} a_n(x-x_0)^n \tag{2-3-9}$$

と表すことにする．ある級数が**収束**しその極限が $y(x)$ であるということは，変数 x を固定して $k\to+\infty$ の極限をとったとき，$R_k(x,x_0)\to 0$ であることを意味する．

複素関数 $y(x)$ が $x=x_0$ で解析的（正則）であるならば，$y(x)$ はテイラー級数展開することができる．級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ が収束する複素数 x の範囲は x_0 を中心とする半径 r の円内

$$|x-x_0|<r \tag{2-3-10}$$

であり，r を収束半径と呼ぶ．

先に触れたように，テイラー級数を k 項で打ち切ったときの残差は，その級数が収束するか否かにかかわらず，

$$\begin{aligned}R_k(x,x_0)&=y(x)-\sum_{m=0}^{k} a_m(x-x_0)^m\\&=\frac{y^{(k+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}\qquad(0<\theta<1)\end{aligned} \tag{2-3-11}$$

と表すことができるので，これは漸近級数の条件 (2-3-6) を満たしている．すなわち，テイラー級数は収束するか発散するかにかかわらずいずれも漸近級数である．

このように収束する漸近級数も存在するが，通常取り扱う漸近級数は上記の収束級数の条件を満たさない発散級数であることが多い．つまり，$k\to+\infty$ の極限で残差 $R_k(x,x_0)$ は 0 に収束するとは限らない．

この性質を別の側面からみると，収束級数を有限項で打ち切るときの誤差（残差）$R_k(x,x_0)$ は項の数を大きくすることにより原理的にはいくらでも小さくできるが，発散する漸近級数を有限項で打ち切るときの誤差（残差）$R_k(x,x_0)$ には下限があることになる．その誤差を最も小さくする方法が 2-1 節で述べた**最適漸近近似法**である．

漸近級数と収束級数にはもう一つ大きな相違点がある．

ある級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ が収束するか否かは，その係数 $\{a_n\}$ のみにより決定される**絶対的な**ものであり，それが収束する関数 $y(x)$ はその結果として定まるものである．一方，**漸近する**という概念は，係数 $\{a_n\}$ と関数 $y(x)$ の両者に依存する**相対的な**性質である．つまり，ある級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ が関数 $y(x)$ の漸近級数であることを示すためには，その係数 $\{a_n\}$ のみならず関数 $y(x)$ も同時に考察する必要がある．そして詳しく述べないが実は,「任意のベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ はある連続関数 $y(x)$ の漸近級数である」ことが証明できる．

漸近級数のこの性質から，読者は「条件収束する（絶対収束しない）級数は項の順序を変更することにより，任意の実数に収束させることが可能である」という事実を想い起こすかもしれない．条件収束級数はタチが悪いという一面があるが，漸近級数は非常に有用な級数なのである．

■［漸近級数の一意性と非一意性］

一般に，一つの関数 $y(x)$ は複数の**異なる**漸近級数で表現できる．

$$\frac{1}{x-1} \sim \sum_{k=1}^{\infty} x^{-k} \qquad x \to +\infty \tag{2-3-12a}$$

$$\frac{1}{x-1} \sim \sum_{k=1}^{\infty} (x^2+x+1)x^{-3k} \qquad x \to +\infty \tag{2-3-12b}$$

逆に，ある漸近級数が表現する関数 $y(x)$ は唯一つに**定まらない**．

$$\frac{1}{x-1} \sim \sum_{k=1}^{\infty} x^{-k} \qquad x \to +\infty \tag{2-3-13a}$$

$$\frac{1+e^{-x}}{x-1+e^{-2x}} \sim \sum_{k=1}^{\infty} x^{-k} \qquad x \to +\infty \tag{2-3-13b}$$

これが，漸近関係「～」と等号「=」の大きな相違点である．すなわち，一つの漸近級数は，展開する漸近関数列 $\{\varphi_m(x)\}$ とすべての m について以下の関係

$$f(x)-g(x) = o\big(\varphi_m(x)\big) \qquad x \to x_0 \tag{2-3-14}$$

を有する**漸近的に同値**な関数群のすべての関数を表現しているわけである．

一方，ある関数 $y(x)$ を特定の漸近関数列 $\{\varphi_m(x)\}$ で展開するとき，その係数 a_m は**一意的に**定まる．

$$a_0 = \lim_{x\to x_0} y(x), \quad a_k = \lim_{x\to x_0} \frac{y(x) - \sum_{m=0}^{k-1} a_m\varphi_m(x)}{\varphi_k(x)} \tag{2-3-15}$$

これらの極限が存在することが，とりもなおさず関数 $y(x)$ が漸近関数列 $\{\varphi_m(x)\}$ で漸近級数展開できることの条件である．

■ ［漸近級数の和と積］

漸近級数はさらに次の諸性質をもつ．

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi_m(x), \qquad g(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} b_m \varphi_m(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-3-16a}$$

であるとき，c, d を定数とすると，

$$cf(x) + dg(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} (ca_m + db_m)\varphi_m(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-3-16b}$$

が成立する．

また，ベキ級数

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \qquad x \to x_0 \tag{2-3-17a}$$

の場合には

$$f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} h_n (x - x_0)^n, \qquad h_n = \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \qquad x \to x_0 \tag{2-3-17b}$$

が成立する．

■ ［漸近級数の項別積分］

漸近級数は項別に積分（x_0 を一端とする有限区間の定積分）することが可能である．すなわち，

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi_m(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-3-18a}$$

であり，かつ，積分

$$\Phi_m(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi_m(t)\,dt \tag{2-3-18b}$$

が存在するならば，

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \tag{2-3-18c}$$

が存在し

$$F(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \Phi_m(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-3-18d}$$

である．

$x \to +\infty$ の極限における漸近関数列 $\{x^{-m}\}$ によるベキ級数展開

$$y(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{-m} \qquad x \to +\infty \tag{2-3-7b 再掲}$$

では，

$$\int_x^{\infty} \left(y(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right) dt \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \frac{a_4}{3x^3} + \cdots = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_m x^{-m+1}}{m-1} \qquad x \to +\infty \tag{2-3-19}$$

と表記する必要がある．

一方，関数の微分を含む漸近関係式の両辺を積分し，不定積分の漸近関係式を得るときには注意を要する．つまり，$x \to x_0$ のとき，$f(x)$ が $g(x)$ に漸近する

$$f(x) \sim g(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-2-8a 再掲}$$

ということは，すなわち，

$$f(x) - g(x) \ll f(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-2-7 再掲}$$

を意味するのであるから，$f(x)$ と $g(x)$ の差を $h(x)$ と定義する

$$f(x) = g(x) + h(x) \tag{2-3-20}$$

と，

$$h(x) \ll f(x) \quad \text{かつ} \quad h(x) \ll g(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-3-21}$$

である．そのとき，漸近関係式 (2-2-8a) の両辺をそれぞれ不定積分したものが漸近関係[*1]

$$\int^x f(t)dt \sim \int^x g(t)dt \qquad x \to x_0 \tag{2-3-22}$$

を満たすためには，

$$\int^x h(t)dt \ll \int^x f(t)dt \quad \text{かつ} \quad \int^x h(t)dt \ll \int^x g(t)dt \qquad x \to x_0 \tag{2-3-23}$$

でなければならないが，特殊な例においてはこれが成立しない場合があるので個別に吟味しなければならない．例えば，

$$f(x) = \frac{1}{x \log x} + \frac{x^i}{x} \tag{2-3-24}$$

であるとき[*2]，

$$f(x) \sim g(x) = \frac{x^i}{x} \qquad x \to +\infty \tag{2-3-25}$$

であるが，

$$\int^x f(t)dt = \int^x \frac{dt}{t \log t} + \int^x \frac{t^i dt}{t} = \log(\log x) - i x^i + C \tag{2-3-26}$$

[*1] 本書では $f(x)$ の不定積分を $\int^x f(t)dt$ と表記する．
[*2] 本書に現れる対数はすべて自然対数である．

であるから,

$$\int^x f(t)dt \sim \int^x g(t)dt + C = -ix^i + C \qquad x \to +\infty$$

ではない.

最後に，しばしば現れる誤りやすい例を指摘しておこう．漸近関係式

$$f(x) \sim \frac{A}{(x-x_0)^n} \quad (0<n<1) \qquad x \to x_0 \tag{2-3-27}$$

を不定積分するとき，その正しい表式は

$$\int^x f(t)dt \sim \frac{A}{1-n}(x-x_0)^{1-n} \qquad x \to x_0$$

ではなく,

$$\int^x f(t)dt \sim C \text{（定数）} \qquad x \to x_0 \tag{2-3-28}$$

である.

■ ［漸近級数の項別微分］

漸近級数を項別に微分することの許されない場合がある．それは，次の例のように，関数の値自体は小さいが，関数の変化率である微分は大きいときである．たとえば,

$$f(x) - g(x) = e^{-1/x^2}\cos\left(e^{1/x^2}\right) \qquad x \to 0 \tag{2-3-29}$$

の右辺は指数関数的に小さいので，左辺の二つの関数は

$$f(x) \sim g(x) \qquad x \to 0 \tag{2-3-30}$$

である．しかし，二つの関数を微分したものの差は,

$$f'(x) - g'(x) = 2x^{-3}\sin\left(e^{1/x^2}\right) + 2x^{-3}e^{-1/x^2}\cos\left(e^{1/x^2}\right) \qquad x \to 0 \tag{2-3-31}$$

であり，右辺に $O(x^{-3})$ という $x \to 0$ の極限で非常に大きくなる項が現れてしまう.

しかし，応用上もっとも重要なベキ級数による漸近級数展開の場合には,「関数 $f(x)$ とその微分 $f'(x)$ のベキ級数による漸近級数展開が可能であり，$f'(x)$ が積分可能である」という条件を満たすとき，$f(x)$ の漸近級数を項別微分することが可能である（演習問題 2-2-2）.

その観点から述べるならば，式 (2-3-31) において左辺の二つの関数の微分の間に $O(x^{-3})$ の差が現れたのは，式 (2-3-29) の右辺がベキ級数により漸近級数展開できないからである.

2-3-4　漸近関係・漸近級数の一様性　特異摂動展開

一様性 (uniformity) は解析学における重要な概念である．本書の読者は，連続 (continuity) あるいは収束 (convergence) に関連して「それが一様に成立するか否か」を問題にしたことがあるだろう．漸近関係・漸近級数においても，一様性はそれらと同様にあるいはより重要な役割をもち，特異摂動展開という概念は漸近級数の一様性という観点からその意味が明瞭になる．

［連続関数の一様性］

ある区間に属する点 x_0 における関数 $f(x)$ の連続性を以下のように定式化する．

任意の（小さな）正の数 ε に応じて正の数 δ を定めることができ，その区間内の $|x-x_0|<\delta$ を満たすすべての点 x に対して $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$ を満足することができるとき，関数 $f(x)$ は点 x_0 で連続である，という．

一般の区間においては，正の数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$ は ε のみならず点 x_0 にも依存するが，特にその区間が有界な閉区間であるならば，正の数 $\delta(\varepsilon,x_0)=\delta(\varepsilon)$ は点 x_0 に依存しない．この「$\delta(\varepsilon,x_0)$ が点 x_0 に依存しない」という性質を，有界な閉区間における**連続関数の一様性**と呼ぶ．

［関数列の一様収束］

任意の正の数 ε に応じて正の整数 N を定めることができ，$n>N$ のすべての整数 n について，ある区間に属するすべての点 x に対して，$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ を満足することができるとき，関数列 $f_n(x)\,(n=1,2,3,\ldots)$ は関数 $f(x)$ に収束する，という．一般に，正の整数 $N=N(\varepsilon,x)$ は ε のみならず点 x にも依存するが，特に，$N(\varepsilon,x)$ が点 x に依存しないとき，すなわち，$N(\varepsilon,x)=N(\varepsilon)$ であるとき，関数列 $f_n(x)$ は関数 $f(x)$ に**一様収束** (to be uniformly convergent) する，という．

ある区間において関数列 $f_n(x)\,(n=1,2,3,\ldots)$ が連続であり，かつ関数列 $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,(n=1,2,3,\ldots)$ が一様収束するとき，関数列の和 $s(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ も連続であり，かつその右辺を**項別に積分**することができる．

$$\int^x s(t)\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int^x f_k(t)\,dt \tag{2-3-32}$$

また，関数列の和 $s(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が収束し，関数列 $f_n(x)\,(n=1,2,3,\ldots)$ が微分可能であり，$df_n(x)/dx\,(n=1,2,3,\ldots)$ が連続であり，かつ

$$t(x)=\sum_{k=1}^{\infty} df_k(x)/dx \tag{2-3-33}$$

が一様収束するならば，

$$ds(x)/dx=t(x) \tag{2-3-34}$$

が成立する．すなわち，関数列の和 $s(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ の右辺を**項別に微分**することができる．

■［漸近関係の一様性］

ある関数が複数の独立変数ないしパラメータの関数 $f(x,\mu)$ であるとき，漸近関係においても一様性という概念が生まれる．

このとき，式 (2-2-4) を一般化した漸近関係

$$f(x,\mu)=o\bigl(g(x,\mu)\bigr) \qquad \mu\to 0 \tag{2-3-35}$$

すなわち，

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{f(x,\mu)}{g(x,\mu)}=0 \tag{2-3-36}$$

は，任意の (小さな) 正の数 ε に応じて，$|\mu|<\delta$ の範囲のすべての μ が $|f(x,\mu)/g(x,\mu)|<\varepsilon$ を満足するように正の数 δ を定めることができる，という意味である．

この場合にも一般に，正の数 $\delta=\delta(\varepsilon,x)$ は ε のみならず変数 x に依存するが，特に $\delta(\varepsilon,x)=\delta(\varepsilon)$ が変数 x に依存しないとき，「漸近関係 (2-3-35) は**一様に成立**する（to hold uniformly）」という．

たとえば，

$$\cos(\mu x)=o\bigl((x^2+1)/\mu\bigr) \qquad \mu\to 0 \tag{2-3-37}$$

は一様に成立するが，

$$\mu x\sin x=o\bigl(\cos(x+\mu)+2\bigr) \qquad \mu\to 0 \tag{2-3-38}$$

は**一様には成立しない**．

なお，ここまで ε-δ 法による収束の定義に言及したため，$f(x,\mu)$ のように関数のパラメータとして μ を用いたが，以下では関数のパラメータとして本書全般で使用する微小パラメータ ε を用いる．

さて，もう一つの漸近関係すなわち式 (2-2-10) を一般化した

$$f(x,\varepsilon)=O\bigl(g(x,\varepsilon)\bigr) \qquad \varepsilon\to 0 \tag{2-3-39}$$

は，$|\varepsilon|<\delta$ の範囲のすべての ε について

$$\left|f(x,\varepsilon)/g(x,\varepsilon)\right| \le K \tag{2-3-40}$$

を満たす正の定数 K が存在する，すなわち $f(x,\varepsilon)$ と $g(x,\varepsilon)$ の比が有界である，という意味である．一般に，正の数 $K = K(x)$ および $\delta = \delta(x)$ は変数 x に依存するが，特に $K(x) = K_0$ および $\delta(x) = \delta_0$ といずれも変数 x に依存しないとき,「漸近関係 (2-3-39) は一様に成立する」という．

たとえば,

$$\cos(\varepsilon x) = O(1) \qquad \varepsilon \to 0 \tag{2-3-41}$$

は一様に成立するが,

$$e^{\varepsilon x} - 1 = O(\varepsilon \sin x) \qquad \varepsilon \to 0 \tag{2-3-42}$$

は一様には成立しない．

■ [漸近級数の一様性]

複数の独立変数ないしパラメータの関数 $f(x,\varepsilon)$ の漸近級数展開においても一様性という概念が生まれる．

第 3 部特異摂動法の各手法において現れる漸近級数展開は

$$y = f(x,\varepsilon) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x)\varphi_m(\varepsilon) \qquad \varepsilon \to 0 \tag{2-3-43}$$

の形をとる．そして，漸近関数列 $\{\varphi_m(\varepsilon)\}$ はベキ級数

$$\{\varphi_m(\varepsilon)\} = \{\varepsilon^m\} \tag{2-3-44}$$

である場合が一般的である．

さて，式 (2-3-43) が漸近級数であることは，すべての k について

$$f(x,\varepsilon) - \sum_{m=0}^{k} a_m(x)\varphi_m(\varepsilon) \ll \varphi_k(\varepsilon) \qquad \varepsilon \to 0 \tag{2-3-45}$$

すなわち,

$$f(x,\varepsilon) - \sum_{m=0}^{k} a_m(x)\varphi_m(\varepsilon) = O\left(\varphi_{k+1}(\varepsilon)\right) \qquad \varepsilon \to 0 \tag{2-3-46}$$

を満たすことを意味する．式 (2-3-46) は $|\varepsilon| < \delta$ の範囲のすべての ε について

$$\left|f(x,\varepsilon) - \sum_{m=0}^{k} a_m(x)\varphi_m(\varepsilon)\right| \le K\left|\varphi_{k+1}(\varepsilon)\right| \tag{2-3-47}$$

を満たす正の定数 K が存在すること，すなわちその比が有界であることを意味する．

一般に，正の数 $K = K(x)$ および $\delta = \delta(x)$ は変数 x に依存するが，特に $K(x) = K_0$ および $\delta(x) = \delta_0$ といずれも変数 x に依存しないとき，すなわち定義域内の変数 x の値に

よらず式 (2-3-47) が成立するとき，式 (2-3-43) を**一様に成立する漸近級数** (uniformly valid asymptotic series) と呼ぶ．一様に成立しない場合，式 (2-3-43) を**特異摂動展開** (singular perturbation expansion) と呼ぶ．

式 (2-3-46) の左辺，すなわち漸近級数展開の $m=k$ 項までとったときの残差 $R_k(x,\varepsilon)$ は漸近級数展開の $m=k+1$ 項 $a_{k+1}(x)\varphi_{k+1}(\varepsilon)$ で評価することができる．したがって，漸近級数展開の各項は一つ前の項より（十分）小さくなければならない．

$$a_{k+1}(x)\varphi_{k+1}(\varepsilon)=o\left[a_k(x)\varphi_k(\varepsilon)\right] \tag{2-3-48}$$

実際，特異摂動法は漸近級数解の有限項（1 項または 2 項）をもって精度よい近似解とすることを目指すのであるから，次の項は前の項を微修正する役割を担わなくてはならない．

一方，漸近関数列 $\{\varphi_m(\varepsilon)\}$ は

$$\varphi_{k+1}(\varepsilon)=o\big(\varphi_k(\varepsilon)\big) \qquad \varepsilon\to 0 \tag{2-3-1 再掲}$$

を満たすので，漸近級数が一様に成立するためにはすべての k についてまた定義域内のすべての変数 x の値に対して $a_{k+1}(x)$ は $a_k(x)$ よりも**特異性が強くない**必要がある．

たとえば，（収束級数でもある）漸近級数

$$\exp(i\varepsilon\cos x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\varepsilon\cos x)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\cos x)^k}{k!}\varepsilon^k \qquad \varepsilon\to 0 \tag{2-3-49}$$

では，すべての係数関数 $a_k(x)=(i\cos x)^k/k!$ は有界であり，それゆえ，すべての k についてまた定義域内のすべての変数 x の値に対して $a_{k+1}(x)$ は $a_k(x)$ に比べて特異性が強くない．したがって，式 (2-3-49) は一様に成立する漸近級数である．

一方，漸近級数

$$\frac{x}{x-\varepsilon}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{x^k}\varepsilon^k \qquad \varepsilon\to 0 \tag{2-3-50}$$

では，変数 x の原点近傍で $a_{k+1}(x)$ は $a_k(x)$ より特異性が強い．

$$a_k(x)=\frac{1}{x^k}=o\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)=o\big(a_{k+1}(x)\big) \qquad x\to 0 \tag{2-3-51}$$

したがって，漸近級数 (2-3-50) は一様に成立しない．

漸近級数 (2-3-43) が一様に成立することは（収束することと同様に）むしろ稀なことで，ほとんどの漸近級数は**一様に成立しない漸近級数**である．

漸近級数の一様性の要件「$a_{k+1}(x)$ は $a_k(x)$ よりも特異性が強くない」の破れる区間，すなわち**破綻区間** (regions of nonuniformity) の代表的な例が第 4 章で取り扱う境界層である．また，第 1 章に現れた永年項も $t\to+\infty$ すなわち "独立変数 t の非常に大きい区間" において，「$a_{k+1}(t)$ は $a_k(t)$ よりも特異性が強くない」という一様性の要件が

破れる例である．

漸近級数の一様性という観点でみると，第 3 部特異摂動法の各手法はいずれも近似解である漸近級数の非一様性を取り除き，一様に成立する解・統一解を得るものである．

2-4　代数方程式の特異摂動問題

第 3 部において，微分方程式の特異摂動法による体系的な近似解法を詳しく説明するのに先立ち，本節でより簡単な代数方程式の特異摂動問題とその解法を取り上げることは特異摂動法の意味を理解するのに役立つだろう．

さて，1-3 節において 5 次方程式

$$x = 1 + \varepsilon x^5 \qquad \text{(1-1-9 再掲)}$$

の解のうち $\varepsilon \to 0$ の極限で $x \to 1$ となる一つの解以外の四つの解を求める問題は構造的特異摂動問題であることを指摘したままになっていた．

漸近級数に関する準備の整ったこの時点でその特異摂動問題を解いてみよう．

まず，1-1 節で通常の摂動法により $\varepsilon \to 0$ の極限で $x \to 1$ となる解を求めた過程をふりかえると，そこでは変数 x の大きさを暗黙のうちに $x = O(1)$ と仮定していたことがわかる．それだからこそ εx^5 が他の 2 項より十分小さくなり，方程式 (1-1-9) の $\varepsilon \to 0$ の極限における近似式が

$$x = 1 \qquad \text{(1-1-11 再掲)}$$

となったわけである．言い換えれば，方程式 (1-1-9) 中の x と 1 の 2 項が互いに**漸近する**関係にあることを仮定したことになる．

一般に (微分) 方程式中の複数の項 (この例では x と 1 の 2 項) が，その他の項 (εx^5) に比べて十分大きく互いに漸近関係にあるとき，それらの大きな複数の項は**卓越平衡** (dominant balance) にあるという．第 3 部で解説する特異摂動法では，与えられた微分方程式中から卓越平衡にある複数の項を取り出し，微分方程式中の等号 “=” を漸近関係 “～” で置き換えるという操作が標準的手法となる．

さて，5 次方程式 (1-1-9) の他の四つの解を求める特異摂動問題では，方程式 (1-1-9) 中の 3 項のうちの別の 2 項の組み合わせが卓越平衡にあるケースを考えなければならない．すると残る可能性は

A)　$\varepsilon x^5 = O(1)$

と

B)　$\varepsilon x^5 = O(x)$

であるが，ケース A) は $x=O(\varepsilon^{-1/5})$ となり，無視されたはずの項 x がこれら 2 項より大きくなるので解として不適である．それゆえ，ケース B) により

$$x=O\left(\varepsilon^{-1/4}\right) \tag{2-4-1}$$

となり，このとき $\varepsilon\to 0$ の極限でこれら 2 項より定数項 1 が十分小さいことを確かめることができる．そこで，改めて

$$x=\varepsilon^{-1/4}y \tag{2-4-2}$$

とおくと，$y=O(1)$ である．式 (2-4-2) を方程式 (1-1-9) に代入すると

$$y^5-y+\varepsilon^{1/4}=0 \tag{2-4-3}$$

を得る．変数変換 (2-4-2) により，構造的特異摂動問題が通常の摂動問題に変換されたことに注意されたい．そこで，式 (2-4-3) に項 $\varepsilon^{1/4}$ が現れていることに鑑み，この新しい変数 y を $\varepsilon^{1/4}$ のベキ級数に展開する．

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}y_m\left(\varepsilon^{1/4}\right)^m \tag{2-4-4}$$

展開式 (2-4-4) を方程式 (2-4-3) に代入すると，

$$\left(y_0+y_1\varepsilon^{1/4}+y_2\varepsilon^{2/4}+\cdots\right)^5-\left(y_0+y_1\varepsilon^{1/4}+y_2\varepsilon^{2/4}+\cdots\right)+\varepsilon^{1/4}=0 \tag{2-4-5}$$

を得る．この式中の $\varepsilon^{1/4}$ に関する次数の等しい項をまとめると，変数 y の展開係数 $y_m(m=0,1,2,\ldots)$ を決定する漸化式を得る．

$$y_0^5-y_0=0 \tag{2-4-6a}$$

$$5y_0^4y_1-y_1+1=0 \tag{2-4-6b}$$

$$5y_0^4y_2+10y_0^3y_1^2-y_2=0 \tag{2-4-6c}$$

$$5y_0^4y_3+20y_0^3y_1y_2+10y_0^2y_1^3-y_3=0 \tag{2-4-6d}$$

$$5y_0^4y_4+20y_0^3y_1y_3+10y_0^3y_2^2+30y_0^2y_1^2y_2+5y_0y_1^4-y_4=0 \tag{2-4-6e}$$

$$5y_0^4y_5+20y_0^3(y_1y_4+y_2y_3)+30y_0^2(y_1y_2^2+y_1^2y_3)+20y_0y_1^3y_2+y_1^5-y_5=0 \tag{2-4-6f}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

第 1 式 (2-4-6a) の解は

$$y_0=0,\quad \pm 1,\quad \pm i$$

の五つである．このうち，$y_0=0$ に対応する漸化式による解は y_m のうち $m=4n+1=1,5,9,13,\ldots$ の項のみが 0 でない，すなわち，4 項おきに非 0 の項をもつことがわかる．したがって，この解のベキ級数は式 (2-4-2,4,6) より，

$$x = \varepsilon^{-1/4} y = \varepsilon^{-1/4} \sum_{n=0}^{\infty} y_{4n+1} \left(\varepsilon^{1/4}\right)^{4n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} y_{4n+1} \varepsilon^n$$

$$= 1 + \varepsilon + 5\varepsilon^2 + 35\varepsilon^3 + \cdots \qquad \text{(2-4-7a)}$$

となり，1-1 節で求めた ε の整数のベキによる級数展開式 (1-1-17) を再現している．

その他の四つの解，すなわち，$y_0 = \pm 1, \pm i$ に対応する，$\varepsilon^{1/4}$ のベキ級数解が，新たに得られる特異摂動問題の解である．

これら四つの解について，漸化式 (2-4-6b,c,d,...) より，

$$x = \varepsilon^{-1/4} y = \sum_{m=0}^{\infty} y_m \left(\varepsilon^{1/4}\right)^{m-1} = y_0 \varepsilon^{-1/4} - \frac{1}{4} - \frac{5}{32} y_0^3 \varepsilon^{1/4} - \frac{5}{32} y_0^2 \left(\varepsilon^{1/4}\right)^2 + \cdots$$

$$(y_0 = \pm 1, \pm i) \qquad \text{(2-4-7b)}$$

を得る．ここに，$y_0^4 = 1$ を用いた．

こうして求めることができた特異摂動問題の四つの解 (2-4-7b) はいずれも $y_0 \neq 0$ であるから，その主要部は $O(\varepsilon^{-1/4})$ であり，$\varepsilon \to 0$ の極限で発散する．そのために，通常の摂動法（1-1 節）では解法の網にかからなかったのである．

第2章の演習問題

2-1　漸近関係

2-1-1　次の命題の真偽を判定せよ.「$f'(x) \to 0$, $x \to +\infty$ ならば，$f(x) \sim C$（定数），$x \to +\infty$ である.」

2-1-2　スティルチェス積分

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

が 2 階常微分方程式

$$x^2 y'' + (3x+1)y' + y = 0 \quad (x > 0)$$

の解であることを証明せよ．

さらに，スティルチェス級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^n$$

が $x \to 0+$ のとき，スティルチェス積分に漸近する（ポアンカレの意味の漸近級数である）こと

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^n \qquad x \to 0+$$

を示せ．

2-2　漸近級数の性質

2-2-1　漸近級数の定義にもとづき，漸近級数を項別に（定）積分できることを証明せよ．

2-2-2　関数 $f(x)$ とその微分 $f'(x)$ のベキ級数による漸近級数展開が可能であり，$f'(x)$ が積分可能であるとき，漸近級数を項別微分することが可能であることを証明せよ．

2-3　卓越平衡

2-4 節「代数方程式の特異摂動問題」で用いた卓越平衡の考え方を適用し，次の 2 階常微分方程式の一つの解の $x \to +\infty$ の極限における主要部を求めよ．

$$y'' + (x^2 + 1)y = \exp\left(x^2\right)$$

第3章

積分の漸近級数展開

一般に，関数を微分することは容易であるが積分することは困難である．微分方程式の厳密解を得ることはさらに難しい．厳密解が発見される僥倖に恵まれた場合にもそれが初等関数で記述されることは稀である．

微分方程式の解を得ることを「積分する」と称するように，微分方程式の厳密解は多くの場合独立変数 x をパラメータにもつ積分の形に表現される（巻末付録B「常微分方程式の厳密解を得る基本公式」参照）．それゆえ，解の値を精度よく評価するために，また解の定性的性質を見極めるためにも積分を漸近級数に展開する必要が生ずる．

今日，代表的な特殊関数とされている，ベッセル関数・エィリー関数のいずれももともとはベッセル積分・エィリー積分として誕生し，後にそれぞれの名を付した微分方程式の解であることが発見されたものである（巻末付録A1,5 参照）．

物理学は，ミクロの世界を記述する素粒子原子核部門と，われわれが日常接する物質，すなわち莫大な数（$N \cong 10^{23}$）の原子，分子，イオンなどが構成する巨視的物質の性質を究める物性論に大別することができる．物性論の基礎である統計物理学においては，構成する粒子数 N が実質的に無限大であることを利用し，漸近級数を用いたさまざまな近似法を駆使する．3-2～3-4 節「ラプラスの方法」,「停留位相法」,「等位相法」はそれらの中で代表的なものである．

最後に（3-5 節）積分の漸近級数展開の統計学と統計物理学への応用例を紹介する．

3-1 部分積分法

部分積分法は，被積分関数を二つの関数，**必要な階数微分可能な関数**$f(t,x)$ と**必要な階数積分可能な関数**$g(t,x)$ の積とみなし，これに部分積分を繰り返し施す方法であり，積分を漸近級数に展開するための最も基本的な手法である．

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int_a^b f(t,x)g(t,x)dt \\
&= \sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\bigl(f_n(b,x)g_{-n-1}(b,x)-f_n(a,x)g_{-n-1}(a,x)\bigr) \\
&\quad +(-1)^k\int_a^b f_k(t,x)g_{-k}(t,x)dt
\end{aligned}
\tag{3-1-1}
$$

ここに $f_n(t,x)$ は $f(t,x)$ を変数 t で n 階微分したもの

$$
f_n(t,x)=\frac{\partial^n}{\partial t^n}f(t,x) \tag{3-1-1a}
$$

であり，また，$g_{-n}(t,x)$ は $g(t,x)$ を変数 t で n 階積分したもの，すなわち

$$
g(t,x)=\frac{\partial^n}{\partial t^n}g_{-n}(t,x) \tag{3-1-1b}
$$

である．積分の上限または下限が変数 x あるいはその関数となる場合もある．

［例題 3-1］ テイラー級数展開

最も簡単な例，

$$
f(t,x)=f(t),\quad g(t,x)=1,\quad a=0,\quad b=x \tag{3-1-2}
$$

の場合には，

$$
f_n(t,x)=f^{(n)}(t),\quad g_{-n}(t,x)=\frac{(t-x)^n}{n!} \tag{3-1-3}
$$

となるので，式 (3-1-1) によりテイラー級数

$$
\begin{aligned}
\int_0^x f(t)dt &= \sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n(-1)f^{(n)}(0)\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}+(-1)^k\int_0^x f^{(k)}(t)\frac{(t-x)^k}{k!}dt \\
&= \sum_{n=0}^{k-1}\frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}+(-1)^k\int_0^x f^{(k)}(t)\frac{(t-x)^k}{k!}dt
\end{aligned}
\tag{3-1-4}
$$

を得る． ■

［例題 3-2］ $1/x$ のベキ級数型漸近級数展開

次の例，

$$
f(t,x)=\frac{1}{t},\quad g(t,x)=e^{x-t},\quad a=x,\quad b=\infty \tag{3-1-5}
$$

では，

$$f_n(t,x) = (-1)^n \frac{n!}{t^{n+1}}, \quad g_{-n}(t,x) = (-1)^n e^{x-t} \tag{3-1-6}$$

となるので，式 (3-1-1) により，$1/x$ のベキ級数型の漸近級数

$$\int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t} dt = \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (-1)(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} (-1)^{n+1}$$

$$+ (-1)^k \int_x^\infty (-1)^k \frac{k!}{t^{k+1}} (-1)^k e^{x-t} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + (-1)^k k! \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{k+1}} dt \tag{3-1-7}$$

を得る（演習問題 3-1-1）．■

■［最適打ち切り項］

式 (3-1-7) の例のように部分積分法による $I(x)$ の漸近級数 (3-1-1) を第 k 項までで打ち切ったときの残差 R_k

$$R_k = (-1)^k \int_a^b f_k(t,x) g_{-k}(t,x) dt \tag{3-1-8}$$

と，切り捨てた最初の項（第 $k+1$ 項）

$$U_k = (-1)^k \big(f_k(b,x) g_{-k-1}(b,x) - f_k(a,x) g_{-k-1}(a,x) \big) \tag{3-1-9}$$

を比較することにより，ポアンカレの意味の漸近級数の条件が成立するか否かを判定しうる．もしポアンカレの意味の漸近級数の条件が成立する場合には，有限項の漸近級数により関数を評価するために最適な項数，**漸近級数の打ち切り項**を決定できるわけである．

さまざまな条件の下でポアンカレの意味の漸近級数の条件が成立することを示すことができるが，最も簡単な例を一つ挙げよう．まず，第 k 項および第 $k+1$ 項までで打ち切ったときの残差 R_k，R_{k+1} と，級数の第 $k+1$ 項，すなわち第 k 項まで残したときに切り捨てた最初の項 U_k の間には式 (3-1-1) により

$$R_k = U_k + R_{k+1} \tag{3-1-10}$$

の関係がある．

いま，積分区間 $[a,b]$ 内のすべての t について，被積分関数 $f_k(t,x) g_{-k}(t,x)$ および $f_{k+1}(t,x) g_{-k-1}(t,x)$ がそれぞれ一定かつ同符号である場合を考えると，定義式 (3-1-8) により残差 R_k と R_{k+1} は異符号である．したがって，式 (3-1-10) により R_k と U_k は同符号である．

それゆえ，式 (3-1-10) より直ちに

$$|R_k| = |U_k + R_{k+1}| = \big||U_k| - |R_{k+1}|\big| < |U_k| \tag{3-1-11}$$

すなわち，ポアンカレの意味の漸近級数の条件を得る．

3-2　ラプラス積分　ラプラス変換とラプラスの方法

$f(t)$ および $\varphi(t)$ が実数値をとる連続関数であるとき，定積分

$$I(x) = \int_a^b f(t)\exp\big(x\varphi(t)\big)\,dt \tag{3-2-1}$$

をラプラス (Laplace) 積分と呼ぶ．

［ラプラス変換］

微分方程式の初期値問題を解く際に有効な積分変換である**ラプラス変換**

$$\tilde{f}(x) = \int_0^\infty f(t)\exp(-xt)\,dt \tag{3-2-1a}$$

はラプラス積分の最も簡単な例である．

前節の部分積分法を用いると，x の関数である積分 (3-2-1a) の $x \to +\infty$ における漸近級数展開を得ることができる．すなわち，式 (3-2-1a) は式 (3- 1 -1) において

$$f(t,x) = f(t), \quad g(t,x) = e^{-xt}, \quad a = 0, \quad b = \infty \tag{3-2-2}$$

とおいたものにほかならないので，

$$f_n(t,x) = f^{(n)}(t), \qquad g_{-n}(t,x) = (-1)^n \frac{e^{-xt}}{x^n} \tag{3-2-3}$$

を用いて，$1/x$ のベキ級数

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= \int_0^\infty f(t)\exp(-xt)\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n(-1)f^{(n)}(0)(-1)^{n+1}\frac{1}{x^{n+1}} + (-1)^k\int_0^\infty f^{(k)}(t)(-1)^k\frac{e^{-xt}}{x^k}\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} f^{(n)}(0)\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^k}\int_0^\infty f^{(k)}(t)e^{-xt}\,dt
\end{aligned} \tag{3-2-4}$$

に展開できる．

式 (3-2-4) の右辺第 2 項に再度部分積分を施すことにより，右辺第 2 項が $O(1/x^{k+1})$ であること，すなわち第 1 項の積分境界からの寄与，特にその最終項に比べて微小量であること

$$R_k = \frac{1}{x^k}\int_0^\infty f^{(k)}(t)e^{-xt}dt = O\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right) = o\left(\frac{1}{x^k}\right) \quad x\to+\infty \quad (k=1,2,3,\ldots) \tag{3-2-4a}$$

がわかり，ラプラス変換 $\tilde{f}(x)$ の漸近級数展開

$$\tilde{f}(x) = \int_0^\infty f(t)\exp(-xt)dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{1}{x^{n+1}} \qquad x\to+\infty \tag{3-2-4b}$$

を得る．

■ ［一般ラプラス積分］

再び，ラプラス積分の一般形 (3-2-1) にもどり，この積分の $x\to+\infty$ の極限における振る舞いを考察する．

積分

$$I(x) = \int_a^b f(t)\exp\big(x\varphi(t)\big)\,dt \tag{3-2-1 再掲}$$

を，式 (3-1-1) において

$$f(t,x) = \frac{f(t)}{x\varphi'(t)}, \quad g(t,x) = \frac{d}{dt}\exp\big(x\varphi(t)\big), \quad a=0, \quad b=\infty \tag{3-2-5}$$

とおいたものとみなし部分積分する．なお，そのためには積分区間 $[a,b]$ 内のすべての t について $\varphi'(t)\neq 0$ でなければならないことに注意する．このとき，

$$f_1(t,x) = \frac{d}{dt}\frac{f(t)}{x\varphi'(t)}, \qquad g_{-1}(t,x) = \exp\big(x\varphi(t)\big) \tag{3-2-6}$$

であるから，

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_a^b f(t)\exp\big(x\varphi(t)\big)\,dt \\ &= \frac{f(b)}{x\varphi'(b)}\exp\big(x\varphi(b)\big) - \frac{f(a)}{x\varphi'(a)}\exp\big(x\varphi(a)\big) - \int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{f(t)}{x\varphi'(t)}\right]\exp\big(x\varphi(t)\big)\,dt \end{aligned} \tag{3-2-7}$$

を得る．ここで式 (3-2-7) の右辺第3項の積分が存在することを仮定する．

次に，式 (3-2-7) の右辺第3項が第1，2項と比較して微小量であることを示す．積分に関する平均値の定理（例えば［7］）により，積分区間 $[a,b]$ において $F(t)$ が連続，また $G(t)$ が積分可能かつ定符号であるならば，次式を満たすような点 c がその区間内に存在する．

$$\int_a^b F(t)G(t)dt = F(c)\int_a^b G(t)dt \qquad (a<c<b) \tag{3-2-8}$$

積分区間 $[a,b]$ 内のすべての t について連続関数 $\varphi'(t)$ が $\varphi'(t)\neq 0$ であることは，$\varphi'(t)$ が定符号であることを意味するので，

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{f(t)}{x\varphi'(t)}\right]\exp\bigl(x\varphi(t)\bigr)\,dt$$
$$=\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{f(t)}{x\varphi'(t)}\right]\frac{1}{x\varphi'(t)}\right\}_{t=c}\int_a^b x\varphi'(t)\exp\bigl(x\varphi(t)\bigr)\,dt \qquad (a<c<b) \tag{3-2-9}$$

となる点 c が区間 $[a,b]$ 内に存在する．

式 (3-2-9) の右辺は積分を実行すると

$$\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{f(t)}{x\varphi'(t)}\right]\frac{1}{x\varphi'(t)}\right\}_{t=c}\left[\exp\bigl(x\varphi(b)\bigr)-\exp\bigl(x\varphi(a)\bigr)\right] \tag{3-2-9a}$$

となり，{　}カッコ中の量は $O(1/x^2)$ である．したがって，$\varphi(b)>\varphi(a)$ のとき $f(b)\neq 0$, $\varphi(b)<\varphi(a)$ のとき $f(a)\neq 0$ が成り立つならば，式 (3-2-7) の右辺第 3 項は第 1，2 項の和に比べて微小量である．それゆえ，ラプラス積分 (3-2-1) の主要部は

$$I(x)=\int_a^b f(t)\exp\bigl(x\varphi(t)\bigr)\,dt$$
$$\sim \frac{f(b)}{x\varphi'(b)}\exp\bigl(x\varphi(b)\bigr)-\frac{f(a)}{x\varphi'(a)}\exp\bigl(x\varphi(a)\bigr) \qquad x\to+\infty \tag{3-2-10}$$

となる．また，式 (3-2-7) の右辺第 3 項の積分に部分積分を繰り返し施すことにより漸近級数の高次項を得ることができる．

以上，積分区間 $[a,b]$ 内のすべての t において $\varphi'(t)\neq 0$ である場合を取り扱ったが，次に $\varphi(t)$ が積分区間 $[a,b]$ 内のある点 c で最大値をとる，すなわち $\varphi'(c)=0$ となる場合を考察する．

■ [ラプラスの方法]

ラプラスの方法 (Laplace's method) は，$\varphi(t)$ が積分区間 $[a,b]$ 内の点 c において最大値をとるようなラプラス積分の $x\to+\infty$ の極限における振る舞いを求める基本的手法であり，積分の漸近級数展開を求める際にしばしば主導的原理となることが以下の各節で明らかになる．

ラプラス積分 (3-2-1) において，$\varphi(t)$ が積分区間 $[a,b]$ 内の点 c で最大値をとり，かつ $f(c)\neq 0$ ならば，積分 (3-2-1) は被積分関数の中に因子 $\exp\bigl(x\varphi(t)\bigr)$ が存在するので $x\to+\infty$ の極限において $t=c$ に非常に鋭いピークをもつ．

次の例

$$f(t)=t^3-2t^2+3t+1, \quad \varphi(t)=1-4(t-1)^2+(t-1)^3-3(t-1)^4, \quad x=15 \tag{3-2-11}$$

で具体的にその様子をみてゆこう．図 3-1 の実線は式 (3-2-1) の被積分関数

$$f(t)\exp\bigl(x\varphi(t)\bigr)$$

を表す．$t=c=1$ に存在する鋭いピーク（縦軸のスケール 10^7 に注目）の半値幅はこの計算例（$x=15$）では 0.5 程度であるが，その x 依存性は $O\left(1/\sqrt{x}\right)$ である（式 (3-2-19) のケースでは $O(1/x^{1/2m})$）から，ピークは $x\to+\infty$ の極限でいよいよ鋭くなってゆく．

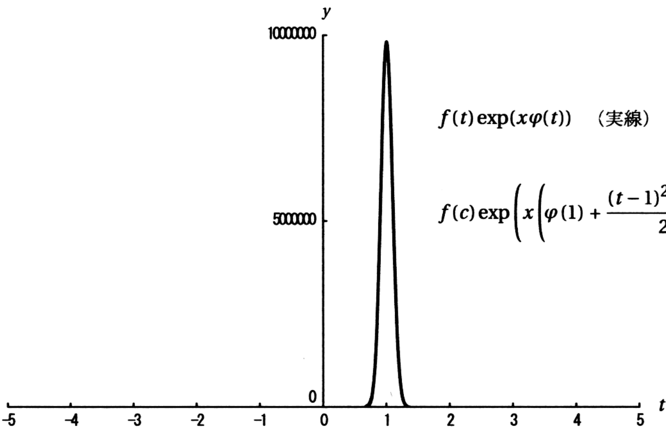


図 3-1　ラプラスの方法：被積分関数（実線）とその近似曲線（点線）．線の太さの中に重なっている（$x=15$）．

一般論にもどり，積分 (3-2-1) のピークがこのように鋭いので，$x\to+\infty$ の極限において $t=c$ のごく近傍の区間 $[c-\varepsilon,c+\varepsilon]$ からの寄与が卓越し，漸近関係

$$I(x)\sim\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}f(t)\exp\left(x\varphi(t)\right)dt\qquad x\to+\infty \tag{3-2-12}$$

が成立する．積分区間を縮めたために生ずる誤差は指数関数的に小さく，積分の幅 ε は半値幅 $O(1/x^{1/2m})$ の数倍程度をとれば十分である．

こうして積分区間 $[a,b]$ をごく狭い区間 $[c-\varepsilon,c+\varepsilon]$ に縮めることができると，その狭い区間内では $\varphi(t)$ を $t=c$ のまわりにテイラー展開することができる．

$$\varphi(t)=\varphi(c)+\varphi''(c)(t-c)^2/2+\cdots \tag{3-2-13a}$$

なお，$\varphi(t)$ が点 c で最大値をとるので $\varphi'(c)=0$ である．

まず，$\varphi''(c)<0$ の場合を考える．

$\varphi(t)$ のテイラー展開の 2 次の項までとると，積分 (3-2-12) は

$$\begin{aligned}I(x)&\sim\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}f(c)\exp\left(x\left(\varphi(c)+\frac{(t-c)^2\varphi''(c)}{2}\right)\right)dt\qquad x\to+\infty\\&=f(c)\exp\left(x\varphi(c)\right)\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\exp\left(\frac{x(t-c)^2\varphi''(c)}{2}\right)dt\qquad x\to+\infty\end{aligned} \tag{3-2-13b}$$

となる．なお，$\exp\left(x\varphi(t)\right)$ に比べずっとゆっくり変動する $f(t)$ は $t=c$ における値 $f(c)$

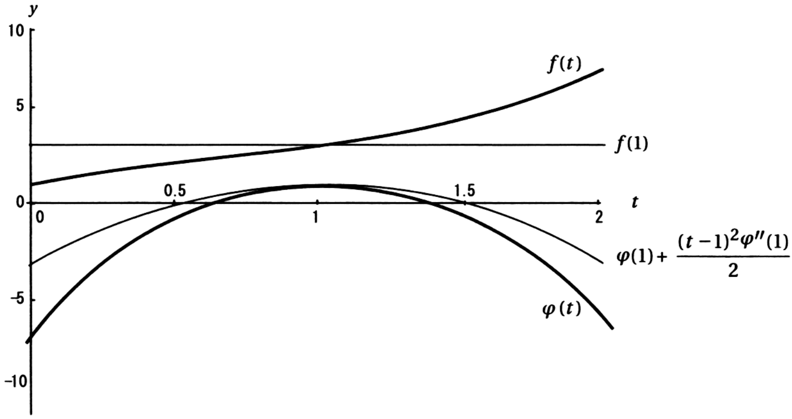


図 3-2 ラプラスの方法：$f(t)$ と $\varphi(t)$ の近似曲線

で置き換えることができる．

図 3-1 は，例 (3-2-11) において以上の操作を施した被積分関数の近似式

$$f(c)\exp\left(x\left(\varphi(c)+\frac{(t-c)^2\varphi''(c)}{2}\right)\right) \qquad （点線）$$

をもとの被積分関数

$$f(t)\exp\left(x\varphi(t)\right) \qquad （実線）$$

と具体的に比較している．2 曲線は図の線の太さでは重なっている．つまり，$t=c$ から離れるとき，$\varphi(t)$ と $f(t)$ 自体はその近似曲線から次第に乖離する（図 3-2）にもかかわらず，被積分関数の近似式 (3-2-13b) 自体は非常に精度よい近似になっている．

再び一般論にもどる．$\varphi(t)$ の極大点近傍で近似した被積分関数

$$f(c)\exp\left(x\varphi(c)\right)\exp\left(\frac{(t-c)^2\varphi''(c)}{2}\right)$$

の，区間 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ の外側の積分範囲における積分

$$f(c)\exp\left(x\varphi(c)\right)\int_{-\infty}^{c-\varepsilon}\exp\left(\frac{x(t-c)^2\varphi''(c)}{2}\right)dt$$

および

$$f(c)\exp\left(x\varphi(c)\right)\int_{c+\varepsilon}^{\infty}\exp\left(\frac{x(t-c)^2\varphi''(c)}{2}\right)dt$$

は積分 (3-2-13b) に比べて指数関数的に小さい．それゆえ，計算の便宜のために精度を失うことなく積分 (3-2-13b) の範囲を上下に $\pm\infty$ まで広げることができる．したがって，それに伴う誤差は指数関数的に小さい．

$$I(x)\sim f(c)\exp\left(x\varphi(c)\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{x(t-c)^2\varphi''(c)}{2}\right)dt \qquad x\to+\infty \tag{3-2-14}$$

ここで

$$u=\sqrt{\frac{-x\varphi''(c)}{2}}\cdot(t-c) \tag{3-2-15}$$

とおくと，

$$I(x)\sim\sqrt{\frac{2}{-x\varphi''(c)}}f(c)\exp\bigl(x\varphi(c)\bigr)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-u^2)\,du \qquad x\to+\infty \tag{3-2-16}$$

となり，さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-u^2)\,du=\sqrt{\pi} \tag{3-2-17}$$

を用いると，

$$I(x)\sim\sqrt{\frac{2\pi}{-x\varphi''(c)}}f(c)\exp\bigl(x\varphi(c)\bigr) \qquad x\to+\infty \tag{3-2-18}$$

を得る．$\varphi(t)$ が最大値をとる点 c が積分の上下限の a または b に一致するときには左右対称な積分の一方のみとなるので，式 (3-2-18) の右辺に 1/2 を乗ずる．

以上のように，積分 (3-2-1) の漸近評価を行うに際し実施した，「積分区間をいったん無限小に縮め，爾後無限大に拡大する」という一見荒唐無稽であるが実は当を得た取り扱いがラプラスの方法の本質である．

さらに一般的な場合，すなわち $\varphi(t)$ が点 c で最大値をとるが $\varphi''(c)=0$ である場合を考える．そのとき，ある偶数 $(2m)$ 階微分係数が最初に 0 でない値（負の値）をとる

$$\varphi''(c)=\varphi^{(3)}(c)=\cdots=\varphi^{(2m-1)}(c)=0,\quad \varphi^{(2m)}(c)<0$$

ので，$\varphi(t)$ は

$$\varphi(t)=\varphi(c)+\varphi^{(2m)}(c)(t-c)^{2m}/(2m)!+\cdots \tag{3-2-19}$$

と表すことができ，積分 (3-2-1) の主要部は

$$\begin{aligned} I(x)&\sim\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}f(c)\exp\left(x(\varphi(c)+\frac{\varphi^{(2m)}(c)(t-c)^{2m}}{(2m)!}\right)dt \qquad x\to+\infty \\ &=f(c)\exp\bigl(x\varphi(c)\bigr)\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\exp\left(\frac{x(t-c)^{2m}\varphi^{(2m)}(c)}{(2m)!}\right)dt \qquad x\to+\infty \end{aligned} \tag{3-2-20}$$

となるが，この場合も精度を失うことなく積分の範囲を上下に $\pm\infty$ まで広げることができ，

$$I(x)\sim f(c)\exp\bigl(x\varphi(c)\bigr)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{x(t-c)^{2m}\varphi^{(2m)}(c)}{(2m)!}\right)dt \qquad x\to+\infty \tag{3-2-21}$$

となる．ここで

$$u=\sqrt[2m]{\frac{-x\varphi^{(2m)}(c)}{(2m)!}}\cdot(t-c) \tag{3-2-22}$$

とおくと，

$$I(x) \sim \sqrt[2m]{\frac{(2m)!}{-x\varphi^{(2m)}(c)}} f(c)\exp\bigl(x\varphi(c)\bigr)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-u^{2m})du \qquad x\to+\infty \tag{3-2-23}$$

を得る．この定積分はガンマ関数

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \tag{A3-1}$$

を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-u^{2m})du=\frac{\Gamma\bigl(1/(2m)\bigr)}{m} \tag{3-2-24}$$

と表すことができるので，最終的に

$$I(x)\sim\frac{\Gamma\bigl(1/(2m)\bigr)}{m}\cdot\sqrt[2m]{\frac{(2m)!}{-x\varphi^{(2m)}(c)}}f(c)\exp\bigl(x\varphi(c)\bigr) \qquad x\to+\infty \tag{3-2-25}$$

を得る．$\varphi(t)$ が最大値をとる点 c が，積分の上下限の a または b に一致するときは式 (3-2-25) の右辺に 1/2 を乗ずる．

式 (3-2-25) は式 (3-2-18) を一般化したものである．

［例題 3-3］ 第 2 種変形ベッセル関数の漸近級数展開の主要部

ν次第 2 種変形 ベッセル関数の積分表示（巻末付録 式 (A2-6) 参照）

$$K_\nu(x)=\int_0^{\infty}\cosh(\nu t)\exp(-x\cosh t)dt \qquad (x>0) \tag{3-2-26}$$

は，ラプラス積分 (3-2-1) において，

$$f(t)=\cosh\nu t,\quad \varphi(t)=-\cosh t \tag{3-2-27}$$

とおいたものであるから，極大を与える条件：

$$\varphi'(c)=0,\quad \varphi''(c)<0$$

を満たす点 $t=c$ を求めると，それは，$c=0$ すなわち積分の下限であることがわかる．ゆえに式 (3-2-18) の右辺に 1/2 を乗じたものを用いることができ，ν 次第 2 種変形ベッセル関数の $x\to+\infty$ の漸近級数の主要部

$$K_\nu(x)=\int_0^{\infty}\cosh(\nu t)\exp(-x\cosh t)dt$$

$$\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{x\cos h''(0)}}\cosh(0)\exp\bigl(-x\cosh(0)\bigr)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x} \qquad x\to+\infty \tag{3-2-28}$$

を得る（巻末付録 式 (A2-8) 参照）． ■

［例題 3-4］　$\varphi(t)$ が最大値をとる点 c で $f(c)=0$ の場合

ここまで $\varphi(t)$ が最大値をとる点 c で $f(c)\neq 0$ である場合を考察してきたが，$f(c)=0$ の場合にもそれが代数的に 0 に近づく場合にはラプラス の方法をそのまま適用できる．

ラプラス積分

$$\int_0^{\pi/4} \tan^4 t \exp(-xt^2)dt \qquad x\to+\infty \tag{3-2-29}$$

において，$\varphi(t)=-t^2$ が最大値をとる点 $t=0$ で $f(t)=\tan^4 t=0$ となる．

しかし，この場合にも「積分区間をいったん無限小に縮めその微小な区間内で $f(t)$ をテイラー展開し，その後積分区間を無限大に拡大する」というラプラスの方法の本質的な手続き

$$\int_0^{\pi/4} \tan^4 t \exp(-xt^2)dt \sim \int_0^{\varepsilon} t^4 \exp(-xt^2)dt \sim \int_0^{\infty} t^4 \exp(-xt^2)dt \qquad x\to+\infty \tag{3-2-30}$$

を適用することができる．

変数変換 $u=xt^2$ を施すことにより，積分 (3-2-30) を

$$\int_0^{\infty} t^4 \exp(-xt^2)dt = \frac{1}{2x^{5/2}}\int_0^{\infty} u^{3/2}\exp(-u)du = \frac{1}{2x^{5/2}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{x^5}} \tag{3-2-31}$$

と評価することができる（巻末付録式 (A3-2,5) 参照）．　■

［例題 3-5］　$\varphi(t)$ が最大値をとる点 c に変数 t が近づく極限で $f(t)\to+\infty$ の場合

$\varphi(t)$ が最大値をとる点 c において，$\lim_{t\to c} f(t)=+\infty$ の場合にもラプラスの方法をそのまま適用できる．ラプラス積分

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\exp\left(-x(1+t^4)\right)}{\sqrt{\tan t}}dt \qquad x\to+\infty \tag{3-2-32}$$

においては，$\varphi(t)=-(1+t^4)$ が最大値をとる点 $t=0$ に近づく極限で $f(t)=1/\sqrt{\tan t}\to+\infty$ となるが，この場合にもラプラスの方法の本質的な手続きを適用することができる．

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\exp\left(-x(1+t^4)\right)}{\sqrt{\tan t}}dt \sim \int_0^{\varepsilon} \frac{\exp\left(-x(1+t^4)\right)}{\sqrt{t}}dt$$

$$\sim \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-x(1+t^4)\right)}{\sqrt{t}}dt = e^{-x}\int_0^{\infty} \frac{\exp(-xt^4)}{\sqrt{t}}dt \qquad x\to+\infty \tag{3-2-33}$$

ここで，変数変換 $u=xt^4$ を施すことにより，積分 (3-2-33) を

$$e^{-x}\int_0^{\infty} \frac{\exp(-xt^4)}{\sqrt{t}}dt = \frac{e^{-x}}{4x^{1/8}}\int_0^{\infty} u^{-7/8}\exp(-u)du = \frac{e^{-x}}{4x^{1/8}}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right) \tag{3-2-34}$$

と評価することができる（巻末付録 A-3 参照）．　■

[例題 3-6]　$\varphi(t)$ が最大値をとる点 c に変数 t が近づく極限において $f(t)$ が指数関数的に 0 に近づく場合

ラプラス積分

$$I(x)=\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{t}}-x\sqrt{t}\right)dt \qquad x\to+\infty \tag{3-2-35}$$

を考える．通常のラプラス積分の取り扱いに従い，

$$\varphi(t)=-\sqrt{t} \tag{3-2-36a}$$

$$f(t)=\exp\left(-1/\sqrt{t}\right) \tag{3-2-36b}$$

とおくと，$\varphi(t)$ が最大値をとる点 0 に t が近づく極限において $f(t)$ は指数関数的に 0 に近づくので，$f(t)$ を $t=0$ のまわりでテイラー展開するとその係数はすべて 0 になる．つまり，このままではラプラスの方法を適用できない．

ところが，詳しく観察すると，$x\to+\infty$ の極限において積分 $I(x)$ の被積分関数 $\exp(-1/\sqrt{t}-x\sqrt{t})$ が最大値をとる点は $t=0$ ではなく

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sqrt{t}}-x\sqrt{t}\right)=0 \tag{3-2-37}$$

を満たす点，すなわち $t=1/x$ であることがわかる．ただ，この点は x とともに移動する**移動極大点**である．

そこで，変数変換

$$t=u/x \tag{3-2-38}$$

を施すと，積分 (3-2-35) を

$$I(x)=\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{t}}-x\sqrt{t}\right)dt=\frac{1}{x}\int_0^{\infty}\exp\left[-\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}+\sqrt{u}\right)\right]du \tag{3-2-39}$$

と変換することができる．このとき，

$$\varphi(u)=-\frac{1}{\sqrt{u}}-\sqrt{u} \tag{3-2-40a}$$

$$f(u)=1 \tag{3-2-40b}$$

であり，$\varphi(u)$ が最大値をとる点を定点 $u=1$ とすることができた．それゆえ，ラプラスの方法を適用できる．すなわち，式 (3-2-18) に式 (3-2-40a,b) を当てはめると，

$$I(x)\sim\frac{2\sqrt{\pi}}{x^{5/4}}\exp\left(-2\sqrt{x}\right) \qquad x\to+\infty \tag{3-2-41}$$

を得る．■

以上，いくつかの代表的な例題を用いてラプラスの方法を概説したが，ラプラスの方法が極めて応用範囲の広い汎用的手法であることは，次節以降で一層明らかになる

であろう．

なお，詳しく述べないが，ラプラスの方法による積分の漸近級数展開の第2項を求めるためには，$f(t)$ および $\varphi(t)$ のテイラー展開のそれぞれ次の二つずつの項を必要とすることを指摘しておく．

3-3　フーリエ積分と停留位相法

前節のラプラス積分 (3-2-1) において，$\varphi(t)$ が純虚数値をとる連続関数である場合

$$\varphi(t) = i\psi(t) \tag{3-3-1}$$

を考える．このとき $f(t), \psi(t)$ は実数値をとる連続関数となるので，定積分

$$I(x) = \int_a^b f(t)\exp\bigl(ix\psi(t)\bigr)\,dt \tag{3-3-2}$$

は，ラプラス変換と並ぶ代表的な積分変換の一つ，フーリエ (Fourier) 変換

$$\hat{f}(x) = \int_a^b f(t)\exp(ixt)\,dt \tag{3-3-3}$$

を一般化したものとみることができる．本節ではこの型の積分の $x \to +\infty$ の極限における漸近級数展開を求める．

［フーリエ変換］

フーリエ変換 (3-3-3) を部分積分する．式 (3-3-3) は式 (3-1-1) で

$$f(t,x) = f(t), \quad g(t,x) = \exp(ixt) \tag{3-3-4}$$

とおいたものであるから，

$$f_n(t,x) = f^{(n)}(t), \qquad g_{-n}(t,x) = (-i)^n \frac{\exp(ixt)}{x^n} \tag{3-3-5}$$

であり，これらを式 (3-1-1) に代入することにより，フーリエ変換 (3-3-3) の x の逆数のベキによる級数展開

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \int_a^b f(t)\exp(ixt)\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left(f^{(n)}(b)(-i)^{n+1}\frac{\exp(ixb)}{x^{n+1}} - f^{(n)}(a)(-i)^{n+1}\frac{\exp(ixa)}{x^{n+1}} \right) \\
&\quad + (-1)^k \int_a^b f^{(k)}(t)(-i)^k \frac{\exp(ixt)}{x^k}\,dt \\
&= -\sum_{n=0}^{k-1} i^{n+1} \left(f^{(n)}(b)\frac{\exp(ixb)}{x^{n+1}} - f^{(n)}(a)\frac{\exp(ixa)}{x^{n+1}} \right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{i^k}{x^k}\int_a^b f^{(k)}(t)\exp(ixt)dt \tag{3-3-6}$$

を得る．

式 (3-3-6) の右辺第 2 項の積分の被積分関数は $x \to +\infty$ の極限で非常に速く振動し，隣り合う（正負の異なる値をとる）小さな区間からの寄与がほぼ打ち消しあうので，積分は 0 に収束する（リーマン（あるいはリーマン-ルベーグ（Riemann-Lebesgue））の定理：演習問題 3-3-1）．

$$\int_a^b f^{(k)}(t)\exp(ixt)dt \to 0 \qquad x \to +\infty \tag{3-3-7}$$

したがって，式 (3-3-6) の右辺第 2 項は $o(x^{-k})$ であり，第 1 項の境界からの寄与，特にその最終項に比べて微小量であること

$$R_k = \frac{i^k}{x^k}\int_a^b f^{(k)}(t)\exp(ixt)dt = o\left(i^k\left(f^{(k-1)}(b)\frac{\exp(ixb)}{x^k} - f^{(k-1)}(a)\frac{\exp(ixa)}{x^k}\right)\right)$$

$$(k = 1,2,3,\ldots) \tag{3-3-6a}$$

がわかり，フーリエ変換 $\tilde{f}(x)$ の漸近級数展開

$$\hat{f}(x) = \int_a^b f(t)\exp(ixt)dt$$

$$\sim -\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1}\left(f^{(n)}(b)\frac{\exp(ixb)}{x^{n+1}} - f^{(n)}(a)\frac{\exp(ixa)}{x^{n+1}}\right) \qquad x \to +\infty \tag{3-3-6b}$$

を得る．

■ ［一般フーリエ積分］

一般フーリエ積分 (3-3-2) にもどり，その $x \to +\infty$ の極限における振る舞いを調べる．$f(t)/\psi'(t)$ が積分区間内で滑らかであり，かつ，積分区間の両端で $\psi'(t) \neq 0$ であるならば，積分 (3-3-2) はラプラス積分と同様の方法で部分積分を行うことができ，

$$I(x) = \frac{f(t)\exp\left(ix\psi(t)\right)}{ix\psi'(t)}\Bigg|_{t=a}^{t=b} - \frac{1}{ix}\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{\psi'(t)}\right)\exp\left(ix\psi(t)\right)dt \qquad x \to +\infty \tag{3-3-8}$$

を得る．この部分積分の操作を繰り返すことにより，x の逆数のベキによる漸近級数展開を得る（リーマンの定理）．

特に，第 2 項は $o(1/x)$ であることがわかるので一般化フーリエ積分 (3-3-2) の主要部は

$$I(x) \sim \frac{f(t)\exp\left(ix\psi(t)\right)}{ix\psi'(t)}\Bigg|_{t=a}^{t=b} \qquad x \to +\infty \tag{3-3-2a}$$

である．

■［停留位相法 (method of stationary phase)］

ここまで，$f(t)/\psi'(t)$ が積分区間 $[a,b]$ 内で滑らかである場合を取り扱ってきたが，積分区間の内点において

$$\psi'(t)=0 \tag{3-3-9}$$

となる場合には上記の方法を使うことができない．

$\psi'(d)=0$ となる点 d を $\psi(t)$ の**停留点** (stationary point) と呼ぶ．

前節のラプラス積分において，被積分関数中の指数関数の肩にある関数 $\varphi(t)$ が最大値をとる点 c 付近の積分への寄与が極めて大きくなることは理解しやすいが，それに比べると一般フーリエ積分において停留点 d 付近の積分への寄与が極めて大きくなることは必ずしも自明でないかもしれない．そこで次の例

$$I(x)=\int_0^{\pi}\cos(x\sin t)dt=\mathrm{Re}\int_0^{\pi}\exp(ix\sin t)dt,\quad x=100 \tag{3-3-10}$$

で具体的にその様子をみてみよう．図 3-3 は積分 (3-3-10) の被積分関数 $\cos(100\sin t)$ を示す．図中央の停留点 $t=\pi/2$ から離れると被積分関数が非常に速く振動し，隣り合う（正負の異なる値をとる）小さな区間からの寄与がほぼ打ち消しあうこと，その結果，$t=\pi/2$ 付近からの寄与のみが有意な値をもつことを理解できるだろう．

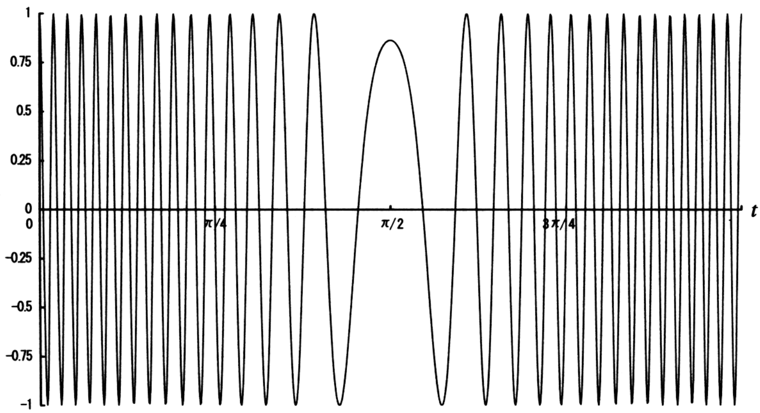


図 3-3　停留点のある被積分関数 $\cos(100\sin t)$

そこで，積分 (3-3-2) への停留点付近の寄与を求めるために，一つの小積分区間の下限が停留点に一致するように積分区間 $[a,b]$ を分割する．そして，この新しい小積分

区間を改めて $[a,b]$ としよう．

このとき，停留点 $t=a$ において，

$$\psi'(a)=\cdots=\psi^{(m-1)}(a)=0, \quad \psi^{(m)}(a)\neq 0$$
$$\psi'(t)\neq 0, \quad t\in(a,b] \tag{3-3-11}$$

とする．

$\psi(t)$ を $t=a$ のまわりにテイラー展開すると

$$\psi(t)=\psi(a)+\psi^{(m)}(a)(t-a)^m/m!+\cdots \tag{3-3-12}$$

を得る．

そこで，積分区間 $[a,b]$ を，停留点 a を含む微小区間 $[a,a+\delta]$ と停留点を含まない区間 $[a+\delta,b]$ に分割し，微小区間 $[a,a+\delta]$ で式 (3-3-12) を代入すると積分 (3-3-2) は

$$I(x)\sim\int_a^{a+\delta}f(a)\exp\left(ix\left(\psi(a)+\frac{\psi^{(m)}(a)(t-a)^m}{m!}\right)\right)dt$$
$$+\int_{a+\delta}^{b}f(t)\exp\big(ix\psi(t)\big)\,dt \qquad x\to+\infty \tag{3-3-13}$$

と表すことができる．

式 (3-3-13) の右辺第 2 項は積分範囲に停留点を含まないので $O(1/x)$ である（式 (3-3-2a)）．一方，以下で示すように，右辺第 1 項は第 2 項に卓越し，$I(x)$ の主要部となる．

$$I(x)\sim\int_a^{a+\delta}f(a)\exp\left(ix\left(\psi(a)+\frac{\psi^{(m)}(a)(t-a)^m}{m!}\right)\right)dt \qquad x\to+\infty$$
$$=f(a)\exp\big(ix\psi(a)\big)\int_a^{a+\delta}\exp\left(\frac{ix(t-a)^m\psi^{(m)}(a)}{m!}\right)dt \tag{3-3-14}$$

ここで，積分 (3-3-14) の上限 δ を ∞ に置き換えることができる．それによる誤差は (3-3-13) の右辺第 2 項と同じ $O(1/x)$ である．

$$I(x)\sim f(a)\exp(ix\psi(a))\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{ix\tilde{t}^m\psi^{(m)}(a)}{m!}\right)d\tilde{t} \qquad x\to+\infty$$
$$\tilde{t}=t-a \tag{3-3-14a}$$

さて，積分 (3-3-14a) を評価するために，まずコーシー（Cauchy）の積分定理（[7]）を用いて $\psi^{(m)}(a)$ の正負の符号に対応して $\tilde{t}$ の積分路を実軸から $\pm\pi/2m$ だけ回転させる（演習問題 3-4-1 参照）．

$$I(x)\sim f(a)\exp\big(ix\psi(a)\big)\int_0^{\infty\exp(\pm i\pi/2m)}\exp\big(ix\tilde{t}^m\psi^{(m)}(a)/m!\big)d\tilde{t}$$
$$x\to+\infty \tag{3-3-14b}$$

次いで，変数 $\tilde{t}$ を，

$$u = -ix\tilde{t}^m\psi^{(m)}(a)/m! \tag{3-3-15}$$

に変換すると，変数 u は実数となり，

$$d\tilde{t} = \frac{u^{\frac{1}{m}-1}}{m}\sqrt[m]{\frac{im!}{x\psi^{(m)}(a)}}du = \frac{u^{\frac{1}{m}-1}}{m}e^{\pm\frac{i\pi}{2m}}\sqrt[m]{\frac{m!}{x|\psi^{(m)}(a)|}}du$$

に注意して，最終的に

$$\begin{aligned} I(x) &\sim \sqrt[m]{\frac{m!}{x|\psi^{(m)}(a)|}}f(a)\exp\left(ix\psi(a)\pm\frac{i\pi}{2m}\right)\int_0^\infty \exp(-u)u^{\frac{1}{m}-1}du\Big/m \\ &= \sqrt[m]{\frac{m!}{x|\psi^{(m)}(a)|}}f(a)\exp\left(ix\psi(a)\pm\frac{i\pi}{2m}\right)\frac{\Gamma(1/m)}{m} \qquad x\to+\infty \end{aligned} \tag{3-3-16}$$

を得る．ここに，± は $\psi^{(m)}(a)$ の符号に一致する方をとる．

式 (3-3-16) の右辺は $O(x^{-1/m})$ $(m\geq 2)$ であり，確かに式 (3-3-13) の右辺第 2 項 ($O(1/x)$) に卓越する．

なお，停留点を積分区間の中央にとる場合は以下のように取り扱えばよい．

i)　m が偶数のときには，式 (3-3-16) に 2 を乗ずる．

$$I(x) \sim 2\sqrt[m]{\frac{m!}{x|\psi^{(m)}(a)|}}\frac{\Gamma(1/m)}{m}f(a)\exp\left(ix\psi(a)\pm\frac{i\pi}{2m}\right) \qquad x\to+\infty \tag{3-3-16a}$$

ii)　m が奇数のときには，式 (3-3-14a) の積分部分の共役複素数を加える．

$$I(x) \sim 2\sqrt[m]{\frac{m!}{x|\psi^{(m)}(a)|}}\frac{\Gamma(1/m)}{m}f(a)\exp\left(ix\psi(a)\right)\cos\frac{\pi}{2m} \qquad x\to+\infty \tag{3-3-16b}$$

[例題 3-7]　$J_n(n)$ の漸近級数展開の主要部

n 次の第 1 種ベッセル関数を積分表示したもの (巻末付録式 (A1-5b) 参照)

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)dt = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_0^\pi \exp i(nt - x\sin t)dt\right] \tag{3-3-17}$$

の $x=n$ における値の $n\to+\infty$ の極限

$$J_n(n) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_0^\pi \exp in(t-\sin t)dt\right] \qquad n\to+\infty \tag{3-3-18}$$

を考える．ここに Re [ ] は，カッコ内の実部をとることを意味する．

式 (3-3-18) は (3-3-2) において，

$$f(t) = \frac{1}{\pi}, \quad \psi(t) = t - \sin t, \quad a = 0, \quad b = \pi \tag{3-3-19}$$

とおいたものであり，

$$\psi'(0) = \psi''(0) = 0, \quad \psi^{(3)}(0) = 1 > 0 \tag{3-3-20}$$

$$\psi'(t) \neq 0, \quad t\in(0,\pi] \tag{3-3-21}$$

である．すなわち，式 (3-3-12) で $m=3$ とおいたものである．したがって，式 (3-3-16) より，

$$J_n(n) \sim \sqrt[3]{\frac{3!}{n\left|\psi^{(3)}(0)\right|}}\, f(0)\, \mathrm{Re}\left[\exp\left(in\psi(0)+\frac{i\pi}{2\cdot 3}\right)\right]\frac{\Gamma(1/3)}{3}$$

$$= \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3}3^{1/6}\pi n^{1/3}} \qquad n\to+\infty \tag{3-3-22}$$

を得る（巻末付録式 (A1-11)）． ■

3-4 複素積分 等位相法

本節では複素平面上の線積分

$$I(x)=\int_C f(z)\exp\bigl(x\varphi(z)\bigr)\,dz \tag{3-4-1}$$

のパラメータ $x\to+\infty$ の極限における漸近級数展開を求める方法を考察する．

式 (3-4-1) の被積分関数はラプラス積分 (3-2-1) と同形であるが，ここでは，変数 $z=u+iv$ は複素数，$f(z)$ および $\varphi(z)$ は**複素解析（正則）関数**（analytic functions）である．また，C は複素平面上の線積分の径路を表す．

なお，ラプラス積分 (3-2-1) あるいはフーリエ積分 (3-3-2) 型の実数積分の場合にも，前 2 節の方法を適用できない場合には積分径路を複素平面上に拡張し本節の方法をとることがある（演習問題 3-4-1 参照）．

本節を理解するためには，複素関数論の初歩を習得している必要がある．その基本の一つであるコーシーの積分定理を確認するために，演習問題 3-4-1 を解いてみるのがよいであろう．

積分 (3-4-1) の漸近級数展開を得るための基本方針は，$f(z)$ および $\varphi(z)$ が複素変数 z の解析関数であることを利用して積分径路 C を変形し，新しい径路 C' 上で $\varphi(z)$ の虚部が一定値をとるようにする，すなわち径路を等位相線とすることである．

$$\varphi(z)=\varphi_r(z)+i\varphi_i(z) \tag{3-4-2}$$

$$\varphi_i(z)=\varphi_i^0=\text{一定} \qquad (C'\text{上}) \tag{3-4-3}$$

この措置により，式 (3-4-1) は

$$I(x)=\exp\bigl(ix\varphi_i^0\bigr)\int_{C'} f(z)\exp\bigl(x\varphi_r(z)\bigr)\,dz \tag{3-4-4}$$

と変形できるので，ラプラスの方法（3-2 節）によりラプラス積分 (3-4-4) の $x\to+\infty$ の極限における漸近級数展開を求めることができる．

［例題 3-8］　フーリエ変換

積分径路を具体的にどう変形すればよいかをみるために，最も簡単な例としてフーリエ変換

$$I(x)=\int_0^a f(z)\exp(ixz)dz,\quad a>0 \tag{3-4-5}$$

すなわち

$$\varphi(z)=iz \tag{3-4-6}$$

の場合を取り上げる．このとき，

$$\varphi_i(z)=\mathrm{Re}\,z=u=\varphi_i^0=\text{一定} \tag{3-4-7}$$

とするためには，その積分径路を虚軸に平行にとればよい（図 3-4）．つまり，複素変数 z の実軸（u 軸）上にあったもともとの径路 $C\,[0,a]$ の始点（原点）と終点 $a+0i$ からそれぞれ虚軸（v 軸）に平行に長さ τ の径路 $C_1\,[0,i\tau]$ と $C_3\,[a+i\tau,a]$ をつくると，これら径路上ではそれぞれ

$$\varphi_i(z)=0=\text{一定}\qquad (C_1\text{上}) \tag{3-4-8a}$$

$$\varphi_i(z)=a=\text{一定}\qquad (C_3\text{上}) \tag{3-4-8b}$$

となる[*1]．

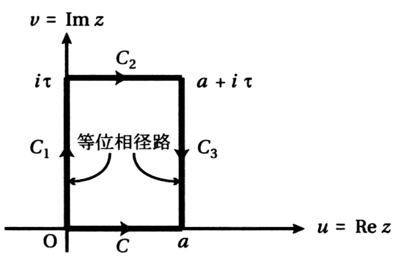


図 3-4　例題 3-8 の等位相径路

これに C_1 の終点（$i\tau$）と C_3 の始点（$a+i\tau$）を結ぶ径路 C_2 を加えた $C_1+C_2+C_3$ を新しい径路 C' とする．新旧の径路 C と C' は始点（原点）と終点 $a+0i$ が一致し，かつそれらで囲まれる領域内部において被積分関数が解析的（正則）であるから，コーシーの積分定理により，新旧の径路 C と C' に沿う二つの積分は一致する．

$$I(x)=\int_0^a f(z)\exp(ixz)dz=\int_{C_1+C_2+C_3} f(z)\exp(ixz)dz \tag{3-4-9}$$

ここで $\tau\to+\infty$ の極限をとると，変形された径路 C' 上の積分のうち，C_2 上の積分

[*1] x をパラメータとして使用しているので，複素平面の実軸を u，虚軸を v とする．

$$I_2(x)=\int_{C_2} f(z)\exp(ixz)dz=\exp(-x\tau)\int_0^a f(u+i\tau)\exp(ixu)du \tag{3-4-10}$$

は $\tau\to+\infty$ の極限で指数関数的に小さくなるので無視することができ，残る C_1，C_3 上の積分

$$I_1(x)=\int_{C_1} f(z)\exp(ixz)dz=i\int_0^\infty f(iv)\exp(-xv)dv \tag{3-4-11}$$

$$I_3(x)=\int_{C_3} f(z)\exp(ixz)dz=-i\exp(iax)\int_0^\infty f(a+iv)\exp(-xv)dv \tag{3-4-12}$$

は，被積分関数の指数関数の部分が実変数となり，ラプラス積分に帰着しているので，3-2 節の方法で漸近級数に展開できる． ■

この問題，フーリエ変換 (3-4-5) は $\varphi'(z)\neq 0$，すなわち積分径路の端点で被積分関数の指数関数の肩が最大値をとる場合である．次に，積分径路の中間点で被積分関数の指数関数の肩が最大値をとる場合を考える．

■ ［**等位相法** (method of steepest descents)］

一般的な複素積分 (3-4-1) にもどる．$\varphi(z)$ は複素変数 $z=u+iv$ の解析関数であるから，その実部 $\varphi_r(z)$ と虚部 $\varphi_i(z)$ のあいだには，コーシー-リーマン (Cauchy-Riemann) の関係式

$$\frac{\partial\varphi_r(z)}{\partial u}=\frac{\partial\varphi_i(z)}{\partial v},\quad \frac{\partial\varphi_r(z)}{\partial v}=-\frac{\partial\varphi_i(z)}{\partial u} \tag{3-4-13}$$

が成立する（[7]）．

複素 z 平面内の勾配 (gradient) ベクトル

$$\nabla_z\equiv\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right) \tag{3-4-14}$$

を用いると，式 (3-4-13) から

$$\nabla_z\varphi_r(z)\cdot\nabla_z\varphi_i(z)=0 \tag{3-4-15}$$

を得る．

すなわち，$\varphi'(z)\neq 0$ である点 z においては，$\varphi(z)$ の実部 $\varphi_r(z)$ と虚部 $\varphi_i(z)$ の勾配ベクトルは直交する．また一般に，関数の勾配ベクトルはその関数が一定値をとる曲線 (level curve) と直交するから，等位相線

$$\varphi_i(z)=\varphi_i^0=\text{一定} \tag{3-4-3 再掲}$$

は $\nabla_z\varphi_r(z)$ の包絡線となる．つまり，等位相線は同時に実部 $\varphi_r(z)$ が最も急激に増加・減少する径路になる．これが**最峻降下法** (method of steepest descents) の命名の由来

であるが，本書では同じことを意味する**等位相法**の名を採用する．

さて，例題3-8すなわち式(3-4-5)（図3-4）では変形された径路 C_1，C_3 上の端点である実軸上で実部 $\varphi_r(z)$ が最大値をとり，径路上で $\varphi_r'(z) \neq 0$ であったが，もし径路の中間点 z_0 で最大値をとる場合，つまり，

$$\varphi'(z_0) = 0 \tag{3-4-16}$$

を満たす点 z_0 すなわち**鞍点**（saddle points）が存在する場合には事情がやや複雑になる．

鞍点においては

$$\nabla_z \varphi_r(z_0) = 0, \quad \nabla_z \varphi_i(z_0) = 0 \tag{3-4-17}$$

であるから，$\varphi(z_0)$ の実部 $\varphi_r(z_0)$ と虚部 $\varphi_i(z_0)$ の勾配ベクトルは一般に直交しない．いま，鞍点 z_0 において，

$$\varphi'(z_0) = \varphi''(z_0) = \cdots = \varphi^{(n)}(z_0) = 0, \quad \varphi^{(n+1)}(z_0) \neq 0 \tag{3-4-18}$$

が成立するとき，鞍点 z_0 を ***n* 次の鞍点**と呼び，n 次の鞍点では $n+1$ 本の等位相線が交わる（演習問題3-4-4）．

さて，径路の中間点で最大値をとる場合すなわち鞍点が存在する場合には，**鞍点を通る等位相線**のうち，その等位相線に沿って鞍点が $\varphi_r(z)$ の値の峠の頂点となり，かつその等位相線の端点がもともとの積分の端点に一致するものを選ぶ．そのとき，鞍点近傍からの寄与が積分(3-4-1)の主要部となる．次の例題で詳しく説明しよう．

［例題3-9］　鞍点の存在する複素積分

第1種ベッセル関数の複素積分表示式

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \exp(z\sinh w - \nu w)\,dw \qquad \left(|\arg z| < \pi/2\right) \tag{A1-5c}$$

において

$$\nu = z = x \quad （実数） \tag{3-4-19}$$

とおいたものの $x \to +\infty$ の極限

$$J_x(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \exp x(\sinh w - w)\,dw \qquad x \to +\infty \tag{3-4-20}$$

を考察する．ここに積分径路 C は $\infty - i\pi$ を始点，$\infty + i\pi$ を終点とする任意の曲線である．

積分(3-4-20)はデバイにより詳しく研究されたのでその鞍点を通過する等位相線を**デバイ積分径路**（Debye's contours）と呼ぶ．

この場合，

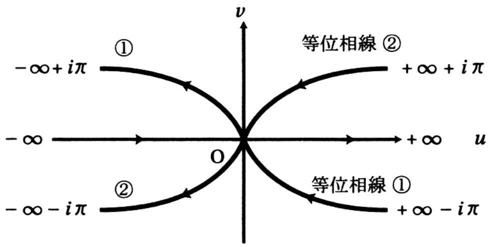


図 3-5　例題 3-9 の鞍点 $z=0$ と 3 本の等位相線（①，②と実軸）

$$f(z)=1,\quad \varphi(z)=\sinh z-z \tag{3-4-21}$$

であるから，$\varphi'(z_0)=0$ を満足する鞍点は $z_0=2n\pi i$（n：整数）である．そこで原点（$z_0=0$）を通過する等位相線を採用する．原点は 2 次の鞍点である．

$$\varphi'(0)=\cosh 0-1=0 \tag{3-4-22a}$$

$$\varphi''(0)=\sinh 0=0 \tag{3-4-22b}$$

$$\varphi'''(0)=\cosh 0\neq 0 \tag{3-4-22c}$$

したがって，鞍点（$z=0$）を通過する等位相線は 3 本存在する（図 3-5）．実際，

$$\varphi_i(z)=\cosh u\sin v-v=\varphi_i(0)=0 \tag{3-4-23}$$

とおくと，その解は

$$v=0\qquad (u\ 軸) \tag{3-4-24a}$$

および

$$\cosh u=v/\sin v \tag{3-4-24b}$$

である．

詳しく調べると，これらの等位相線は次の性質を有することがわかる．

a）　等位相線 (3-4-24a) は実軸（u 軸）に一致し，u が増加する（図の右に進む）とともに実部 $\varphi_r(z)$ は増加する．

b）　等位相線の方程式 (3-4-24b) の解は鞍点（$z=0$）で交叉する 2 本の曲線からなり，鞍点（$z=0$）において実軸となす角はそれぞれ $\mp\pi/3$ である．

これらを，鞍点（$z=0$）から出発する 6 本の曲線とみると，実部 $\varphi_r(z)$ の増加する等位相線の向きは交互に入れ替わっている．なお，図 3-5 の矢印の向きが実部 $\varphi_r(z)$ の増加方向を示す．

それゆえ，積分 (3-4-20) の経路 C として，$\infty-i\pi$ から出発し鞍点に至る等位相線①

と，鞍点から出発し $\infty+i\pi$ に至る等位相線②の二つを接続したものを採用すればよいことがわかる.

積分 (3-4-20) への寄与は鞍点近傍に限定されるので，等位相線①および等位相線②上の積分変数 z をそれぞれ

$$z = s\exp(-i\pi/3) \qquad (\text{①上}) \tag{3-4-25a}$$

$$z = s\exp(i\pi/3) \qquad (\text{②上}) \tag{3-4-25b}$$

とおくことができる．また，鞍点近傍で

$$\sinh z \sim z + \frac{z^3}{6} \qquad z \to 0 \tag{3-4-26}$$

である．これらの結果を用いると式 (3-4-20) から,

$$J_x(x) \sim \frac{1}{2\pi i}\left[\exp\left(\frac{-i\pi}{3}\right)\int_\varepsilon^0 \exp\left(\frac{-xs^3}{6}\right)ds + \exp\left(\frac{i\pi}{3}\right)\int_0^\varepsilon \exp\left(\frac{-xs^3}{6}\right)ds\right] \qquad x \to +\infty \tag{3-4-27}$$

を得，さらに，積分の上下限 ε を ∞ に置き換えることができるので,

$$\begin{aligned}
J_x(x) &\sim \frac{\exp(i\pi/3)-\exp(-i\pi/3)}{2\pi i}\int_0^\infty \exp\left(\frac{-xs^3}{6}\right)ds \\
&= \frac{\sin(\pi/3)}{\pi}\left(\frac{6}{x}\right)^{1/3}\int_0^\infty \exp(-s^3)ds = \frac{\sin(\pi/3)}{\pi}\left(\frac{6}{x}\right)^{1/3}\frac{\Gamma(1/3)}{3} \\
&= \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3}3^{1/6}\pi x^{1/3}} \qquad x \to +\infty
\end{aligned} \tag{3-4-28}$$

を得る．この結果は，3-3 節の例題 3-7 で得た表式 (3-3-22) に一致している.　■

3-5　統計学・統計物理学への応用

多数の標本の統計的性質を考察する**統計学**において，標本数（測定回数）n を無限に大きくした極限はその理論的基礎として重要な役割を果たす.

また，われわれが日常経験する自然現象すなわち**巨視的現象**と原子・分子レベルの微視的現象の橋渡しをする**統計物理学**においては，現象に関与する粒子数 N は 10^{23} 程度であり実質的に無限大である（1 に比べて極めて大きい）ので，常に粒子数 $N \to +\infty$ という極限を考察することになる．また，極低温現象では絶対温度 $T \to +0$ の極限を取り扱う.

それゆえ，統計学・統計物理学の諸問題には，変数のさまざまな極限おける諸関数の**漸近級数展開**，特に**積分の漸近級数展開**を求める機会が数多く現れる.

本節では，統計学における標本数 $n \to +\infty$ の極限，統計物理学における粒子数 $N \to +\infty$ の極限および低温の極限 $T \to +0$ に関連する応用例をそれぞれ一つずつ取り上げる．

■ ［中心極限定理・チェビシェフの不等式・大数の法則（統計学への応用）］

確率変数 X の確率密度関数を $f_X(x)$ とする．さらに，X の測定 n 回の平均値を確率変数 Y とし

$$y = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n \tag{3-5-1}$$

確率変数 Y の確率密度関数 $f_Y(y - \langle X \rangle)$ を考える．ここに，$\langle X \rangle$ は確率変数 X の平均値である．

確率密度関数 $f_Y(y - \langle X \rangle)$ のフーリエ変換の $n \to +\infty$ における極限は

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_Y(k) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-ik(y - \langle X \rangle)\right] f_Y(y - \langle X \rangle) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{-ik}{n} [(x_1 - \langle X \rangle) + (x_2 - \langle X \rangle) + \cdots + (x_n - \langle X \rangle)] \\
&\quad \cdot f_X(x_1) f_X(x_2) \cdots f_X(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{-ik}{n} (x_1 - \langle X \rangle) f_X(x_1) dx_1\right]^n \\
&= \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \sigma_X^2}{n^2} + O\left(\frac{k^3}{n^3}\right)\right]^n \sim \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{k^2 \sigma_X^2}{n}\right] \qquad n \to +\infty
\end{aligned} \tag{3-5-2}$$

である．ここに，

$$\sigma_X^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle X \rangle)^2 f_X(x) dx = \left\langle X^2 \right\rangle - \langle X \rangle^2 \tag{3-5-3}$$

は確率変数 X の分散である．

リーマンの定理からも明らかなように（演習問題 3-3-1），式 (3-5-2) は

$$\tilde{f}_Y(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-ik(y - \langle X \rangle)\right] f_Y(y - \langle X \rangle) dy \to 0 \qquad k \to \pm\infty \tag{3-5-4}$$

の条件を満たす．ゆえに，フーリエ逆変換を施すと，

$$\begin{aligned}
f_Y(y - \langle X \rangle) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ik(y - \langle X \rangle)\right] \tilde{f}_Y(k) dk \\
&\sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ik(y - \langle X \rangle)\right] \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{k^2 \sigma_X^2}{n}\right] dk \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \frac{1}{\sigma_X} \exp\left[\frac{-n(y - \langle X \rangle)^2}{2\sigma_X^2}\right] \qquad n \to +\infty
\end{aligned} \tag{3-5-5}$$

を得る．

すなわち，$n \to +\infty$ の極限において確率変数 Y の確率密度関数 $f_Y(y - \langle X \rangle)$ は確率変数 X の平均値 $\langle X \rangle$ を平均値，X の分散 σ_X^2 の $1/n$ を分散とする正規分布に漸近する（**中心極限定理**）．

$$\langle Y \rangle \sim \langle X \rangle, \quad \sigma_Y^2 \sim \frac{\sigma_X^2}{n} \qquad n \to +\infty \tag{3-5-6}$$

さて，確率変数 X の分散は，次の不等式

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle X \rangle)^2 f_X(x)dx \\
&\geq \int_{-\infty}^{\langle X \rangle - d} (x - \langle X \rangle)^2 f_X(x)dx + \int_{\langle X \rangle + d}^{\infty} (x - \langle X \rangle)^2 f_X(x)dx \\
&\geq d^2 \int_{-\infty}^{\langle X \rangle - d} f_X(x)dx + d^2 \int_{\langle X \rangle + d}^{\infty} f_X(x)dx = d^2 P(|x - \langle X \rangle| \geq d) \qquad (d \geq 0)
\end{aligned} \tag{3-5-7}$$

を満足する．ここに $P(|x - \langle X \rangle| \geq d)$ は，確率変数 X の測定値がその平均値 $\langle X \rangle$ から d 以上離れる確率である．

式 (3-5-7) から直ちに**チェビシェフ（Tchebycheff）の不等式**

$$P(|x - \langle X \rangle| \geq d) \leq \frac{\sigma_X^2}{d^2} \tag{3-5-8a}$$

を得る．

ここで再び，確率変数 Y すなわち X の測定 n 回の平均値

$$y = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n \tag{3-5-1 再掲}$$

を考える．中心極限定理により，$n \to +\infty$ の極限において，確率変数 Y の平均値 $\langle Y \rangle$ は X の平均値 $\langle X \rangle$ に，また分散 σ_Y^2 は X の分散 σ_X^2 の $1/n$ に漸近するので，チェビシェフの不等式より，

$$P(|y - \langle Y \rangle| \geq d) = P(|y - \langle X \rangle| \geq d) \leq \frac{\sigma_Y^2}{d^2} \sim \frac{\sigma_X^2}{nd^2} = O(1/n) \qquad n \to +\infty \tag{3-5-8b}$$

を得る．

式 (3-5-8b) は，どのように小さな d を選んだとしても確率変数 Y の測定値がその平均値 $\langle Y \rangle$ から d 以上離れる確率は試行回数 $n \to \infty$ の極限で 0 に近づくことを示している．これは「事象 A の生起確率が p であるとき，試行回数 $n \to +\infty$ の極限で生起回数は np に漸近する」こと，すなわち**大数の法則**を意味する．

■ **［熱力学的極限（統計物理学への応用 1）］**

統計物理学の対象である巨視的な系（物体）の体積，エネルギー，粒子数をそれぞれ，V, E, N とする．平均密度 N/V および 1 粒子あたりの平均エネルギー E/N を一定に保ちつつ，粒子数 $N \to +\infty$ とする極限を**熱力学的極限**または**巨視的極限**と呼ぶ．

さて，熱力学的諸量は，体積 V，エネルギー E，エントロピー S のように粒子数に比例して増加する**示量変数**と圧力 P，温度 T のように粒子数 N に依存しない**示強変数**に分類することができる．

ヘルムホルツ（Helmholtz）の自由エネルギー

$$F = E - TS \tag{3-5-9}$$

は示量変数である．

しかし，統計物理学により導かれるヘルムホルツの自由エネルギーの表式，

$$F = -k_B T \log Z(T, V, N) \tag{3-5-10}$$

すなわち分配関数 $Z(T, V, N)$ の対数に比例するという関係式からは，粒子数に比例するという示量変数の性質が見えてこない．なお，

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \quad [\mathrm{J/K}]$$

はボルツマン（Boltzman）定数である．

そこで，もっとも簡単な例として理想気体の系を考えると，分配関数は

$$\begin{aligned} &Z(T, V, N) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N} N!} \int d\boldsymbol{r}_1 \cdots \int d\boldsymbol{r}_N \int d\boldsymbol{p}_1 \cdots \int d\boldsymbol{p}_N \exp\left[\frac{-1}{2mk_B T}(\boldsymbol{p}_1^2 + \cdots + \boldsymbol{p}_N^2)\right] \\ &= \frac{V^N (2\pi m k_B T)^{3N/2}}{(2\pi\hbar)^{3N} N!} \end{aligned} \tag{3-5-11}$$

である．

ここに $m, \hbar$ はそれぞれ気体分子の質量とプランク定数 $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$ の $1/(2\pi)$ 倍，すなわち $\hbar \equiv h/2\pi$ であり，また，$\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j \ (j = 1, \ldots, N)$ はそれぞれ理想気体分子 j の位置ベクトルと運動量ベクトルである．

つまり，式 (3-5-11) の右辺分母に現れている階乗 $N!$ のために，このままではヘルムホルツの自由エネルギー F に相当する分配関数 $Z(T, V, N)$ の対数は粒子数 N に比例しない．

そこで，階乗関数 $N!$ すなわちガンマ関数の $N \to +\infty$ の極限における漸近級数展開であるスターリング（Stirling）の公式（巻末付録 A3-4）の主要部

$$\Gamma(N+1) = N! \sim \sqrt{2\pi} N^{N+1/2}/e^{N+1} \qquad N \to +\infty \tag{3-5-12}$$

を適用する．これによりヘルムホルツの自由エネルギー F の漸近関係式

$$\begin{aligned} F &= -k_B T \log Z(T,V,N) = -k_B T \log\left[\frac{V^N (2\pi m k_B T)^{3N/2}}{(2\pi\hbar)^{3N} N!}\right] \\ &\sim -k_B T \log\left[\frac{V^N (2\pi m k_B T)^{3N/2} e^N}{(2\pi\hbar)^{3N} N^N}\right] \\ &= -N k_B T \log\left[\frac{V (2\pi m k_B T)^{3/2} e}{(2\pi\hbar)^3 N}\right] \qquad N \to +\infty \end{aligned} \tag{3-5-13}$$

を得る．式 (3-5-13) の最後のカギカッコ内の平均密度 N/V を一定に保ちつつ極限をとることに注意すると，同式は示量変数であるヘルムホルツの自由エネルギー F が粒子数 N に比例することを示している．

次に，エネルギー E の状態の生起確率が

$$P(E) \propto \exp\bigl(-E/(k_B T)\bigr) \tag{3-5-14}$$

である正準 (canonical) 分布を考える．この系の状態密度を $D(E)$ と表すと，系がエネルギー $E \sim E + dE$ の状態をとる確率は

$$\exp\bigl(-E/(k_B T)\bigr) D(E) dE \tag{3-5-15}$$

に比例する．ところで，状態密度の対数 $\log D(E)$ は示量変数であるから（[15]）状態密度 $D(E)$ の $N \to +\infty$ における漸近級数の主要部は

$$D(E) \sim \exp\left(s(E/N)\frac{N}{k_B}\right) \qquad N \to +\infty \tag{3-5-16}$$

という関数形をもたねばならない．ここに

$$s(E/N) \equiv k_B \lim_{N\to+\infty} \frac{\log D(E)}{N} \tag{3-5-17}$$

である．

さて，正準系の分配関数 $Z(T)$ は状態密度 $D(E)$ を用いて

$$Z(T) = \int_0^\infty \exp\bigl(-E/(k_B T)\bigr) D(E) dE \tag{3-5-18}$$

と表すことができるので，式 (3-5-18) に式 (3-5-16) を代入すると，

$$\begin{aligned} Z(T) &\sim \int_0^\infty \exp\left[\frac{-N}{k_B T}\left(\frac{E}{N} - Ts(E/N)\right)\right] dE \\ &= N \int_0^\infty \exp\left[\frac{-N}{k_B T}\bigl(z - Ts(z)\bigr)\right] dz \end{aligned} \tag{3-5-19}$$

を得る．ここに新しい変数

$$z \equiv E/N \tag{3-5-20}$$

を導入した．$N \to +\infty$ の極限において積分 (3-5-19) を評価するためにラプラスの方法を用いることができる．すなわち，$N \to +\infty$ の極限において，被積分関数 $-N(z - Ts(z))/(k_B T)$ の最大値 $z = z_0$ 付近

$$1 - Ts'(z_0) = 0 \tag{3-5-21}$$

の寄与が積分 (3-5-19) の主要部となる．

実際にラプラスの方法を実行すると，

$$\begin{aligned} Z(T) &= N\int_0^{\infty} \exp\left[\frac{-N}{k_B T}\left(z - Ts(z)\right)\right] dz \\ &\sim N\int_0^{\infty} \exp\left[\frac{-N}{k_B T}\left(z_0 - Ts(z_0) - \frac{Ts''(z_0)}{2}(z - z_0)^2\right)\right] dz \qquad N \to +\infty \\ &= N\int_0^{\infty} \exp\left[\frac{-N}{k_B T}\left(-\frac{Ts''(z_0)}{2}(z - z_0)^2\right)\right] dz \exp\left[\frac{-N}{k_B T}\left(z_0 - Ts(z_0)\right)\right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi k_B N}{-2s''(z_0)}} \exp\left[\frac{-N}{k_B T}\left(z_0 - Ts(z_0)\right)\right] \end{aligned} \tag{3-5-22}$$

を得る．

これから，式 (3-5-10) によりヘルムホルツの自由エネルギー

$$F = -k_B T \log Z(T, V, N) \sim N[z_0 - Ts(z_0)] = E_0 - TNs(E_0/N) \qquad N \to +\infty \tag{3-5-23}$$

を得る．式 (3-5-23) は

$$S = Ns(E_0/N), \quad E = E_0$$

と対応させることにより，式 (3-5-9) を再現している．

以上，統計物理学の基本的な問題における漸近級数の応用例を示したが，粒子数 $N \to +\infty$ の極限は統計物理学が取り扱う現象に共通の性質であるから，数多くの具体的問題において漸近級数の応用例を見出すことができる．

■ [極低温の電子気体のグランドポテンシャル（統計物理学への応用 2）]

極低温の電子気体，すなわち縮退したフェルミ（Fermi）気体の熱力学的状態量であるグランドポテンシャル

$$\begin{aligned} \Omega &= -pV = -k_B T \sum_n \log\left(1 + \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_n}{k_B T}\right)\right) \\ &= -\frac{2\sqrt{2}Vm^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right) + 1} \end{aligned} \tag{3-5-24}$$

を考える．ここに，和 n はすべての量子状態 ε_n についてとる（[15]）．

電子の量子状態すなわち並進運動のエネルギー ε [*1]の確率分布は，フェルミ分布

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}\right)+1} \tag{3-5-25}$$

に従う．ここに，

$$\mu \equiv \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V} \tag{3-5-26}$$

は系の化学ポテンシャル，また，p, T, E, N, S, V はそれぞれ，電子気体の圧力，（絶対）温度，全エネルギー，構成粒子数，エントロピー，体積である．また，m は電子の質量である．

電子などフェルミ気体の熱力学的状態量は，一般に次の積分

$$I = \int_0^\infty f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}\right)+1}d\varepsilon \tag{3-5-27}$$

の形で表現できる．

積分変数を ε から

$$x = \frac{\varepsilon-\mu}{k_B T} \tag{3-5-28}$$

に変換すると，

$$\begin{aligned}
\frac{I}{k_B T} &= \frac{1}{k_B T}\int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}\right)+1}d\varepsilon = \int_{\frac{-\mu}{k_B T}}^\infty \frac{g(\mu+k_B T x)}{e^x+1}dx \\
&= \int_0^{\frac{\mu}{k_B T}} \frac{g(\mu-k_B T x)}{e^{-x}+1}dx + \int_0^\infty \frac{g(\mu+k_B T x)}{e^x+1}dx \\
&= \int_0^{\frac{\mu}{k_B T}} \left[1-\frac{1}{e^x+1}\right]g(\mu-k_B T x)dx + \int_0^\infty \frac{g(\mu+k_B T x)}{e^x+1}dx \\
&= \int_0^{\frac{\mu}{k_B T}} g(\mu-k_B T x)dx - \int_0^{\frac{\mu}{k_B T}} \frac{g(\mu-k_B T x)}{e^x+1}dx + \int_0^\infty \frac{g(\mu+k_B T x)}{e^x+1}dx
\end{aligned} \tag{3-5-29}$$

を得る．

さて，極低温の極限 $T \to +0$ においては，フェルミ分布関数（式 (3-5-25)，図 3-6 の点線）は階段関数（同，実線：絶対 0 度のフェルミ分布関数）に漸近する．そのとき

$$\frac{\mu}{k_B T} \to +\infty \tag{3-5-30}$$

であるから，フェルミ分布関数は変数 x の積分範囲のうち $\varepsilon = \mu\,(x=0)$ のごく近傍（幅 $\Delta\varepsilon = O(k_B T)$）においてのみ 0 でない値をとり，これより大きな x では急速に減衰する．

[*1] 本節では ε は微小量を意味しない．

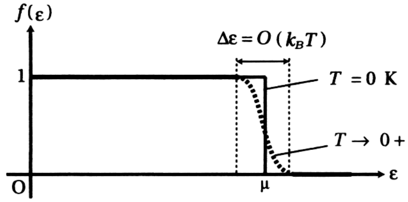


図 3-6　極低温におけるフェルミ分布関数 (3-5-25)

それゆえ，式 (3-5-29) の最後の段の第 2 の積分の上限を ∞ で置き換えることができる．さらにラプラスの方法を用いると積分 (3-5-29) は

$$\begin{aligned}\frac{I}{k_BT} &\sim \int_0^{\frac{\mu}{k_BT}} g(\mu-k_BTx)dx - \int_0^{\infty}\frac{g(\mu-k_BTx)}{e^x+1}dx + \int_0^{\infty}\frac{g(\mu+k_BTx)}{e^x+1}dx \\ &= \int_0^{\frac{\mu}{k_BT}} g(\mu-k_BTx)dx + \int_0^{\infty}\frac{g(\mu+k_BTx)-g(\mu-k_BTx)}{e^x+1}dx \\ &= \int_0^{\frac{\mu}{k_BT}} g(\mu-k_BTx)dx \\ &\quad + \int_0^{\infty}\frac{1}{e^x+1}\left[2k_BTg'(\mu)x+\frac{1}{3}(k_BT)^3g^{(3)}(\mu)x^3+O\left((k_BTx)^5g^{(5)}(\mu)\right)\right]dx \end{aligned} \tag{3-5-31}$$

となり，もとの積分変数 ε にもどすと，

$$\begin{aligned} I &\sim \int_0^{\mu} g(\varepsilon)d\varepsilon + 2g'(\mu)(k_BT)^2\int_0^{\infty}\frac{x}{e^x+1}dx \\ &= \int_0^{\mu} g(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}g'(\mu)(k_BT)^2 \qquad T\to+0 \end{aligned} \tag{3-5-32}$$

を得る．

式 (3-5-32) に $g(\varepsilon)=\varepsilon^{3/2}$ を代入した結果を用いると，式 (3-5-24) よりフェルミ気体のグランドポテンシャル Ω

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{2\sqrt{2}Vm^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^{3/2}d\varepsilon}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon-\mu}{k_BT}\right)+1} \\ &\sim -\frac{2\sqrt{2}Vm^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\left[\frac{2}{5}\mu^{5/2}+\frac{\pi^2}{4}\mu^{1/2}(k_BT)^2\right] \qquad T\to+0 \end{aligned} \tag{3-5-33}$$

を得る．グランドポテンシャル Ω から，フェルミ気体のエントロピー，エネルギー，熱容量等の熱力学的諸量を得ることができる．

本節では統計学・統計物理学の分野から数例を取り上げたにすぎないが，応用数学・物理学・工学・経済学などさまざまな学問分野において，無次元化した変数の一つが 1 に比べて十分大きいときには無限大の極限（たとえば $N\to+\infty$），また 1 に比べて十

分小さいときには0に漸近する極限（たとえば $T \to +0$）を適用することが可能であり，その際具体的な数値を得るために漸近級数・特に積分の漸近級数展開の方法が極めて有効である．

第3章の演習問題

3-1　部分積分法

3-1-1　式 (3-1-7) がポアンカレの意味の漸近級数 $\int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t} dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},\ x \to +\infty$ であることを示せ．

3-1-2　部分積分法により次の積分の $x \to +\infty$ の極限における主要部を求めよ．

$$\int_0^1 ds \int_0^1 dt \exp(-xst)$$

3-1-3　フレネル積分 (A7-1, 2)

$$C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \quad S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$$

の $z \to 0+$ のベキ級数展開式 (A7-3, 4) を導け．

3-2　ラプラス積分

3-2-1　ラプラス積分

$$I(x) = \int_a^b f(t) \exp\big(x\varphi(t)\big)\, dt \qquad x \to +\infty \tag{3-2-1}$$

において，$\varphi(t)$ が積分区間 $[a, b]$ 内の端点 a（または b）で最大値をとる場合を考える．積分 (3-2-1) の $x \to +\infty$ における主要部は，もし，$\varphi'(a) \neq 0$ かつ $f(a) \neq 0$（または $\varphi'(b) \neq 0$ かつ $f(b) \neq 0$）であれば，式 (3-2-7) の境界からの寄与，

$$I(x) \sim -\frac{f(a)}{x\varphi'(a)} \exp\big(x\varphi(a)\big) \quad \left(\text{または}\ \frac{f(b)}{x\varphi'(b)} \exp\big(x\varphi(b)\big)\right) \qquad x \to +\infty$$

であり，一方，$\varphi'(a) = 0$，$\varphi''(a) \neq 0$ かつ $f(a) \neq 0$（または $\varphi'(b) = 0$，$\varphi''(b) \neq 0$ かつ $f(b) \neq 0$）であれば，式 (3-2-18) に 1/2 を乗じたもの

$$I(x) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{-x\varphi''(a)}} f(a) \exp\big(x\varphi(a)\big) \qquad x \to +\infty$$

$$\left(\text{または} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{-x\varphi''(b)}} f(b) \exp\big(x\varphi(b)\big) \qquad x \to +\infty\right)$$

であることを示せ．

3-2-2　［ワトソンの定理（Watson's lemma）］

$$I(x) = \int_0^c f(t) \exp(-xt) dt \qquad (c > 0)$$

において，連続関数 $f(t)$ が $t \to 0+$ の極限で

$$f(t) \sim t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\mu k} \qquad (\nu > -1, \mu > 0) \qquad t \to 0+$$

と漸近級数展開でき，かつ $c=+\infty$ の場合にはある正の γ に対して

$$f(t) \ll e^{\gamma t} \qquad t \to +\infty$$

であるとき，

$$I(x) = \int_0^c f(t)\exp(-xt)dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \Gamma(\nu+\mu k+1)}{x^{\nu+\mu k+1}} \qquad x \to +\infty$$

となることを示せ．

3-2-3 ガンマ関数の漸近級数展開（スターリングの公式 (A3-4)）の主要部

$$\Gamma(x) \sim (x/e)^x \sqrt{2\pi/x} \qquad x \to +\infty$$

を導け．

3-3 停留位相法

3-3-1 ［リーマン（あるいはリーマン-ルベーグ）の定理］

$$\int_a^b |f(t)|\,dt \text{ が存在するならば } \int_a^b f(t)\exp(ixt)dt \to 0 \qquad x \to +\infty$$

を証明せよ．

3-3-2 停留位相法により次の各積分の $x \to +\infty$ の極限における主要部を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \cosh t \exp(ixt^3)dt$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\left(x(t-\pi)^2\right)\exp(-t)dt$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\left(x(t-\pi)^3\right)\cosh t^2 dt$

(4) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(x\sin^2 t)dt$

3-4 等位相法

3-4-1 図 3-7 の積分径路 $(\theta=\pi/4)$ にコーシーの積分定理を適用し，フレネル積分 (A7-1, 2) の $x \to +\infty$ の極限値

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt \to \frac{1}{2} \qquad x \to +\infty$$

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt \to \frac{1}{2} \qquad x \to +\infty$$

を求めよ．

3-4-2 次の積分の $x \to +\infty$ の極限における主要部を求めよ．まず，単純な部分積分法あるいは停留位相法では求められないことを確認し，等位相法を用いよ．

$$\int_0^{\pi} \frac{t\exp(ixt)}{\sqrt{\sin t}}dt$$

3-4-3 例題 3-9 と同じベッセル関数の複素積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \exp(x\sinh z - nz)dz \tag{A1-5c}$$

において，変数 x が次数 n より小さいまま両者を正の無限大に近づける極限，すなわち

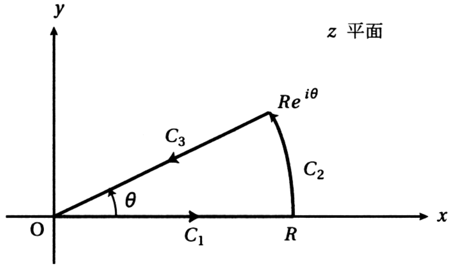


図 3-7　問題 3-4-1 の積分径路

$$x = n/\cosh\alpha$$

とおいたものの $n \to +\infty$ の極限,

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \exp\left(\frac{n\sinh z}{\cosh\alpha} - nz\right)dz \qquad n \to +\infty \tag{A1-5c}$$

における漸近級数展開の主要部を求めよ．ここに積分径路 C は複素平面上の $\infty - i\pi$ から $\infty + i\pi$ に至る任意の曲線である．

3-4-4　n 次の鞍点では $n+1$ 本の等位相線が交わることを証明せよ．

第3部

特異摂動法（微分方程式の体系的近似解法）

第1部で概説したように，微分方程式の近似解を求める基礎的な手法である（通常の）摂動法を適用することができない一連の微分方程式系・**特異摂動問題**が存在する．第2部で漸近級数の基礎理論を展開し応用例を紹介したのを受け，第3部では特異摂動問題の漸近級数による近似解を得る特異摂動法の三手法，境界層理論・漸近接続（第4章），WKB法（第5章），複スケール解析（第6章）を順に解説する．

このうち，境界層理論とWKB法は，微小係数を0に近づける極限の問題と微小係数を単純に無視した問題が質的に異なる典型的な（構造的）特異摂動問題，すなわち最高階の係数が微小量である微分方程式の近似解を求める手法である．一方，独立変数の中に複数のスケールを導入する複スケール解析は，最高階の係数が必ずしも微小量ではないより一般的な特異摂動問題の近似解を求める方法であり，特異摂動問題を通常の摂動問題に置き換えて解く手法という側面を有する．

本書で取り上げる例題のほとんどは，境界条件を課す点が二つ以上存在する**境界値問題**すなわち**大域的**（global）**問題**であり，変数の定義域全般にわたり精度よい近似解・**統一解**を得ることが目的となる．そのために，微分方程式および解の性質に応じて変数の定義域を分割し，それぞれの領域（区間）ごとに精度よい近似微分方程式を構築しその厳密解を求め，最後にそれらを**漸近接続**するのが境界層理論の指導原理である．

漸近接続の原理は複雑な問題については WKB 法においても援用される．

ここで，特異摂動法の各論に入るに先立ち，その基本的手続きを説明しておこう．

特異摂動法においては通常次のステップを踏む．

1. 必要に応じ，微分方程式の解の性質に仮定を設ける．
   たとえば，境界層理論の 4-2 節において「解が独立変数 x の定義域の左端 $x=0$ の近傍に唯一の境界層をもつ」と仮定すること，あるいは，WKB 法の 5-1 節において「(5-1-7a) の各項の中で振幅 $A(x)$ の 2 階微分が $A(x)$ そのものおよび $A(x)$ の 1 階微分よりも十分小さい」と仮定することなどがこれにあたる．
2. 上のステップをへて，微分方程式の中のある項が他のいずれかの項に比べて**はるかに小さい**とみなすことができるとき，その項を無視し微分方程式の中から取り除く．その結果として，微分方程式中の等号 “=” を，残された**卓越平衡**にある複数の項の間の漸近関係を示す記号 “～” に置き換える．
3. 以上の手続きをへて近似された微分方程式（漸近関係式）の厳密解を求める．
4. その解が，1. で設定した仮定，また 2. における大きさの評価と矛盾しないことを確認する．もしくは，解の適用条件を吟味する．

このプロセスは，公理と定義から出発し理路整然とした論理に従い一筋の道にそって定理を導出してゆくという，幾何学の演繹法を筆頭とする従来の数学の方法，すなわち読者がこれまで親しんできた数学の方法とは大いに趣を異にすると感ぜられるはずである．

以下の各章ではほぼ例外なくこれらの手法の各論ごとに厳密解の存在する例題を取り上げ，近似解法の精度を検証する．そのほとんどが発散する漸近級数の主要部あるいは第 2 項までの和にすぎないにもかかわらず，特異摂動法による近似解が厳密解を極めてよく再現することを確認した読者は，一様かつ絶対収束する無限級数に比べて，発散する漸近級数が定性的にも定量的にも優れた級数であることを再認識することだろう．

第4章

境界層理論・漸近接続

本章の境界層理論と次章のWKB法はともに，最高階の導関数に微小係数 ε がかかる微分方程式を解く近似解法である．この場合，近似の出発点として単純に ε を0で置き換えると，微分方程式の階数が下がり，その結果 $\varepsilon \neq 0$ であるもとの微分方程式と質的に異なる微分方程式となってしまう．具体的には微分方程式に課すことのできる境界条件の数が減ることになる．

その結果，境界条件を課すことのできない境界付近の区間で近似解は自動的に破綻をきたし，漸近級数解として一様性をもたない．つまり，最高階の導関数に微小係数 ε がかかる微分方程式の問題は構造的特異摂動問題である．

したがって，最高階の導関数に微小係数 ε がかる微分方程式に対しては，ε を0とおいて求めた非摂動解を基礎とする通常の摂動法を援用することは原理的に不可能であり，新たな近似解法，すなわち**特異摂動法**が必要になる．

境界層という言葉の起源である**流体力学の境界層理論**は，流れの端すなわち水底付近に現実に存在する**境界層**を解析するために開発された特異摂動法の一つである．

4-1節で流体力学の境界層理論を概説し，4-2節で境界層理論を微分方程式の近似解法として一般化する．続いて4-3節で，境界層理論の指導原理である**漸近接続**という手法に着目しつつ，境界層理論の数学的意味づけを行う．以下，一般の微分方程式における応用例として4-4節では内部境界層問題，4-5節では非線形境界層問題を挙げ，最後に4-6節では宇宙工学，4-7節では再び流体力学における応用例を紹介する．

なお，微分方程式の近似解法として境界層理論を学ぶためには4-1節を読みとばしてもかまわない．

4-1　流体の境界層と境界層理論

図 4-1 に示すような，2 次元（水平面内）の一様な x 方向の流れ（$u=U$: 一定）が障害物（平板）に出会い流れが変化する様子を考察する．なお，時間的に変化のない定常流とする．

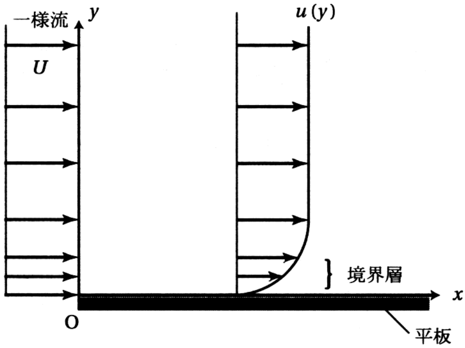


図 4-1　平板に出会う一様流れ

2 次元定常流の運動方程式である定常ナヴィエ-ストークス（Navier-Stokes）方程式と連続の式は

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{4-1-1a}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{4-1-1b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{4-1-1c}$$

である（[16]～[19]）．ここに，独立変数は平面座標 (x,y) であり，$\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ はそれぞれ地点 (x,y) における流速の (x,y) 成分，ρ，ν，$p(x,y)$ はそれぞれ流体（たとえば水）の密度，動粘性係数，圧力である．

微分方程式の境界条件は，障害物（平板）の表面で流速が 0 になること

$$u=v=0,\quad x>0,\quad y=0 \tag{4-1-2a}$$

と，障害物（平板）から十分離れると一様流速 U に近づくこと

$$u\to U,\qquad v\to 0,\qquad y\to +\infty \tag{4-1-2b}$$

である．

ここで，現象を特徴づける尺度を導入し，それらを単位として物理量を測る，すな

わち規格化する．実際の自然・社会現象を取り扱うとき，正しく見極めた諸尺度を導入することは問題を定式化するための大事な第1ステップである．

さて，速度の尺度に**一様流速** U を用いることは誰にも異存ないであろう．長さの尺度として，壁において0である流速が壁から遠ざかりほぼ一様流速 U に近づくまでの y 方向の距離 L をとる．この距離 L は，流れが障害物に出会った後ほぼ落ちついた流速分布をもつまでの x 方向の流下距離と同じオーダーであると考えることができる．すなわち，流速 $\big(u(x,y), v(x,y)\big)$ の x あるいは y による偏微分を次のように評価する．

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{u}{L}\right), \qquad \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} = O\left(\frac{v}{L}\right) \tag{4-1-3}$$

式 (4-1-1a,b,c) において，それぞれ平面座標 (x,y) は L，流速 (u,v) は U を単位として測ることにより，微分方程式に現れる変数，関数，係数を無次元化すると，

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{4-1-4a}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{4-1-4b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4-1-4c}$$

を得る．ただし，圧力 $p(x,y)$ の微分については後に考察する．ここに

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu} \tag{4-1-5}$$

は，ナヴィエ-ストークス方程式 (4-1-4a,b) 中の**慣性項**（左辺）と**粘性項**（右辺第2項）の比のオーダーを評価する無次元量で，**レイノルズ (Reynolds) 数**と呼ばれるが，その数値は一般に1よりずっと大きい．実際，水の動粘性係数 ν は常温で $\nu = 0.01\ \mathrm{cm^2/s}$ 程度であるから，U と L がそれぞれ，数 cm/s，および数 cm 程度以上であれば，レイノルズ数 $Re = UL/\nu$ は少なくとも $O(100)$ となり，その逆数 $\varepsilon = 1/Re$ は，$O(0.01)$ の微小量である．

さて，最も単純なケースとして，流れが障害物に出会った後しばらく流下して，流れが落ちついた地点 x における流速の x 成分 u の y 方向分布 $u(y)$ を考えると，式 (4-1-4a) は

$$v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4-1-6}$$

となる．後に式 (4-1-15b) から明らかになるように $\partial p/\partial x$ は定数であり，式 (4-1-6) は変数 y の2階常微分方程式となるので，満たすべき境界条件は式 (4-1-2a,b) の二つである．

さて，微分方程式 (4-1-6) の最高階すなわち2階微分の係数は微小量 $1/Re$ である．

通常の摂動法においては，その出発点として微小量 $1/Re$ を 0 とおき摂動項を無視した微分方程式の解を求め，それに高次の摂動項を順次加える，という手順で近似解を構築してゆくのであるが，この場合はその方法をとることができない．

なぜならば，出発点となるべき摂動項を無視した微分方程式の解はそれ自体，もとの微分方程式のよい近似解でなければならないが，微分方程式 (4-1-6) で最高階の係数 $1/Re$ を 0 で置き換えると1階微分方程式になってしまい，境界条件 (4-1-2a,b) を二つともに満足することができなくなるからである．

すなわち，微分方程式の中の最高階の導関数に微小係数 ε がかかっている微分方程式において ε を 0 とおくと，その微分方程式は，もとの微分方程式よりも階数が低い，質的に異なる微分方程式となるので，これを出発点の非摂動解とする通常の摂動法を使用することは原理的に不可能なのである．

そこで，通常の摂動法とは異なる**特異摂動法**として**境界層理論**が登場する．なお，水面波などの境界層の存在を無視しうる現象を考察する場合には（第7章），式 (4-1-1a, b) の粘性項を無視することが許される．

■ ［境界層］

この現象（図 4-1）における流れを詳しく観察すると，流れが平板に出会った後，平板近傍に流速の x 成分 u が y 方向に急激に変化する薄い層が存在することに気づく．この薄い層を**境界層**と呼ぶ．境界層の厚さを δ とすると境界層内部では

$$\frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{u}{\delta}\right) \tag{4-1-7}$$

と見積もることができる．すなわち，境界層内部では y 座標を境界層の厚さ δ を単位として測るべきであることを示唆している．このとき，流速 $\big(u(x,y), v(x,y)\big)$ の x，y による偏微分はそれぞれ，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = O\left(\frac{u}{L}\right),\quad \frac{\partial v}{\partial x} = O\left(\frac{v}{L}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{u}{\delta}\right),\quad \frac{\partial v}{\partial y} = O\left(\frac{v}{\delta}\right) \tag{4-1-8}$$

と，評価しなければならない．

再び，微分方程式 (4-1-1a,b,c) にもどり，座標 (x, y) はそれぞれ (L, δ) を単位として測り，それに対応して流速 (u, v) はそれぞれ仮に (U, V) を単位として測ることにすると，式 (4-1-1a,b,c) は

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{VL}{U\delta}\right) v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \left\{\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\} \tag{4-1-9a}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{VL}{U\delta}\right) v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \left\{\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\} \tag{4-1-9b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{VL}{U\delta}\right)\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{4-1-9c}$$

となる．ここに，境界層の厚さ δ は境界層の外側における長さの尺度 L よりずっと小さいことを銘記しておく．

$$\delta/L \ll 1 \tag{4-1-10}$$

さて，このように規格化した変数を用いると，$\partial u/\partial x, \partial v/\partial y$ はともに $O(1)$ であるから，式 (4-1-9c) により，$VL/(U\delta)$ も $O(1)$ でなければならないので，ここまで仮に流速の y 成分の単位としてきた V のオーダーが判明する．

$$V=O\left(U\frac{\delta}{L}\right) \tag{4-1-11}$$

この結果を用いると，式 (4-1-9a) は

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{L}{\delta}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4-1-12}$$

となる．ただし，式 (4-1-9a) の右辺の { } 内の第 1 項は第 2 項に比べて $O\left((\delta/L)^2\right)$ の微小量であるため無視した．

さて，式 (4-1-12) の右辺第 2 項，すなわち $\partial^2 u/\partial y^2$ が重要な役割を果たす境界層においては，この項が他の項と肩を並べる大きさをもたねばならない．すなわち，

$$\frac{1}{Re}\left(\frac{L}{\delta}\right)^2=O(1) \tag{4-1-13}$$

これから直ちに，境界層の厚さ δ のオーダーが判明する．

$$\frac{\delta}{L}=O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)=O\left(\sqrt{\frac{\nu}{UL}}\right) \tag{4-1-14}$$

つまり，境界層の厚さ δ はレイノルズ数の平方根に反比例する，特に，動粘性係数 ν の平方根に比例する．

ところで，式 (4-1-11) によれば，式 (4-1-9b) の各項はもともと，式 (4-1-9a) の対応する各項に比べ $O(V/U)$ すなわち $O(\delta/L)$ の微小量である．したがって，式 (4-1-9b) の主要項の一つである $(-1/\rho)(\partial p/\partial y)$ も $O(\delta/L)$ でなければならない．それゆえ，圧力 p を壁面 $(y=0)$ から境界層の外縁 $(y=O(\delta))$ まで積分したときの変化量は $O\left((\delta/L)^2\right)$ 程度と極めて小さいのでこれを無視できる．すなわち，境界層内部の圧力 p はその地点と同じ x 座標をもつ境界層の外縁の圧力に等しいと近似できる．

■ [外域]

次に，境界層の外側（外域：$y \gg \delta$）を考察する．

境界層の外域では微分方程式 (4-1-4a) のうち $O(1/Re)$ である右辺第 2 項は無視する

ことができ，また外域での流れは x 方向のみである $(\tilde{u}(x),0)$ ので左辺第2項も無視することができる．

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{4-1-15a}$$

式 (4-1-15a) を積分すると，ベルヌイ (Bernoulli) の式

$$\frac{1}{2}\tilde{u}^2+\frac{p}{\rho}=\text{一定} \tag{4-1-15b}$$

を得る．

■［境界層方程式］

再び，境界層内部にもどる．境界層内部の圧力 p はその地点と同じ x 座標をもつ境界層の外縁の圧力の式 (4-1-15b) により決定されるので，境界層内部での未知変数は流速の2成分 $(u(x,y),v(x,y))$ のみとなり，その満たすべき微分方程式は (4-1-12) と (4-1-9c) である．

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4-1-16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{4-1-17}$$

その y 座標に関する境界条件は

$$u=v=0, \qquad y=0 \tag{4-1-18}$$

$$u\to\tilde{u}(x), \qquad y\to+\infty \tag{4-1-19}$$

である．こうして，所要の二つの境界条件を満足する近似微分方程式系，すなわち境界層内部の微分方程式 (4-1-16,17) と外域の微分方程式 (4-1-15a) およびその解 (4-1-15b) を得ることができた．これらは境界条件 (4-1-19) で接続されている．

この微分方程式系を個々の問題固有の上流側境界条件 $(x\to-\infty)$ と（ここでは簡単のため平板とした）障害物・壁の形状の境界条件を与えて解くことになる．

具体的には，次式で定義される**流れ関数** (stream function) $\psi(x,y)$ を導入すると，

$$u=\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}, \qquad v=-\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} \tag{4-1-20}$$

連続の式 (4-1-17) は自動的に満たされるので，境界層内部の微分方程式系 (4-1-16,17) は，次の $\psi(x,y)$ に関する3階微分方程式一つに集約される．

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{4-1-21}$$

この微分方程式を具体的問題に即して解いてゆくこれ以降の手続きは本書では詳述し

ない．

以上，概説したように，境界層理論の要諦は，全解析領域を境界層内部と外域に分割し，それぞれに適当な近似方程式系を構築し，両者における解を境界条件により接続することにより全解析領域でよい近似解となる統一解を求めることである．この手続きを一般化したものが後に詳述する**漸近接続**である．

なお，境界層理論においては式 (4-1-14) が示すように微分方程式の最高階にかかる微小係数が 0 に近づく極限をとると境界層の厚さ δ が 0 に近づくことが本質的である．

次節以降で，この境界層理論を一般の微分方程式に関する近似解法として定式化する．

4-2　微分方程式の近似解法としての境界層理論—基本解法

前節で概説した，元来流体力学固有の現象を取り扱う手法であった境界層理論を，本節では最高階の導関数に微小係数 ε がかかっている微分方程式を解く近似解法として一般化する．この一般化された境界層理論により広範な微分方程式の近似解を得ることが可能となる．

流体の境界層にならい，微分方程式の解 $y(x)$ が急激に変動する狭い区間を一般に**境界層**（さらに広い意味で**内域**）と呼ぶ．境界層内では解が急激に変動し，解の微分 $y'(x)$ の絶対値が大きな値をとる一方，境界層の外側の広い区域・**外域**では解 $y(x)$ および解の微分 $y'(x), y''(x)$ が同程度の値をとるので，微小係数 ε がかかっている項を単純に小さいとみなすことができる．このように境界層理論においては，独立変数の定義域を境界層と外域に分割し，それぞれにおいてもとの微分方程式を近似した**より解きやすい**微分方程式系を構築しそれぞれの解を求め，両者を漸近接続する．

境界層を**狭い区間**と述べたが，正確には「微小係数 ε が 0 に近づくとき，その大きさ（幅）が 0 に近づく区間」という意味である．なお，微小係数 ε が 0 に近づくとき，その大きさ（幅）が有限の大きさを保つ区間で解が急激に変動する問題は，次章「WKB 法」で取り扱う．

このように，流体力学で開発された手法を広く微分方程式の近似解として一般化するが，本章では 4-7 節を除き独立変数が一つの問題を取り扱う．また，物理学・工学などの応用問題ではなく，すでに抽象化された数学の問題として定式化された微分方程式を解く際すでに変数は無次元化されており，前節のような物理的尺度の考察は不要となる．

■ [一般化された境界層理論]

さて繰り返しになるが，境界層理論においては，微分方程式の独立変数 x の定義域を関数 $y(x)$ が急激に変化する薄い境界層（内域）と関数 $y(x)$ がゆっくり変化する外域に分割する．

関数 $y(x)$ がゆっくり変化する外域では $y(x)$ の導関数のうち微小係数 ε がかかる項は無視できるが，関数 $y(x)$ が急激に変化する境界層内では微小係数 ε がかかっていても $y(x)$ の導関数自体が大きな値をもつのでその積を無視することはできない．一方，境界層は薄い（$\varepsilon \to 0$ のとき $\delta \to 0$）ので，その中では近似方程式の係数が x の関数である場合にもこれを定数と置き換えることができる．これは，前節の流体力学の例には現れなかった，より一般的な取り扱いである．

以上の手続きにより，そのままでは厳密解を得ることのできない微分方程式を境界層と外域のそれぞれにおいて厳密解を得ることのできる微分方程式のペア（場合によっては三つ以上の組）に置き換えることができる．

こうして得たより簡単な微分方程式を積分した結果現れる未定の積分定数を境界条件あるいは初期条件と**漸近接続**の条件を用いて決定し，定義域全体の統一解（一様に成立する漸近級数解）を得る．漸近接続という手法が境界層理論の指導原理である．

[例題 4-1]　2 階斉次線形微分方程式

この一連の手続きを一般的な 2 階斉次線形微分方程式の境界値問題

$$\varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \quad p(x) > 0, \quad y(0) = C, \quad y(1) = D \tag{4-2-1}$$

の $\varepsilon \to 0+$ の極限における近似解を求める問題を例として具体的に説明する．

この問題すなわち 1 階微分の係数 $p(x)$ が正である場合の解 $y(x)$ は定義域の左端 $x = 0$ の近傍に唯一の境界層をもつことが後に明らかになるが，当初,「$x = 0$ の近傍に唯一の境界層をもつ」ことを仮定して解析を進め，解 $y(x)$ を得たときその仮定が妥当であったことを確認するという手続きをとる．

A）外域

外域では解 $y(x)$ は急激に変化しないので y, y', y'' はいずれも $O(1)$ である．それゆえ，

$$p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad x \le 1, \quad y(1) = D \tag{4-2-2}$$

が式 (4-2-1) の外域における精度よい近似方程式となる．この近似により，2 階微分方程式 (4-2-1) は階数が一つ下がり 1 階微分方程式 (4-2-2) になったので，直ちにその解

$$y_o(x) = D\exp\left(\int_x^1 \frac{q(t)}{p(t)}dt\right) \tag{4-2-3}$$

を求めることができる.

先に微分方程式 (4-2-1) において $p(x) > 0$ つまり $p(x) \neq 0$ としたのは，もし $p(x_0) = 0$ となる点 x_0 が存在すると，点 x_0 が外域の解 (4-2-3) の特異点となりその近傍で「y, y', y'' がいずれも $O(1)$ である」という条件を満たさなくなってしまうからである.

もう一つ注意しなければならないのは，1 階微分方程式 (4-2-2) の解 (4-2-3) は $x = 1$ における境界条件 $y(1) = D$ のみしか満足できないことである．もう一方の境界 $x = 0$ は外域に含まれず境界層内に入るので，$x = 0$ での境界条件 $y(0) = C$ を外域解 (4-2-3) に課すことはできないし満足させることもできない.

境界層の幅を $\delta(\varepsilon)$ と表すと，外域解 (4-2-3) は区間

$$\delta \ll x \leq 1 \tag{4-2-3a}$$

内で精度よい近似式になっている[*1].

B）境界層

次に，境界層内 $(x = O(\delta))$ では $\varepsilon \to 0+$ の極限において $\delta(\varepsilon) \to 0+$ となるので，微分方程式 (4-2-1) 中の x の関数である係数 $p(x)$ および $q(x)$ を

$$p(x) = p(0) = p_0, \qquad q(x) = q(0) = q_0 \tag{4-2-4}$$

と定数で置き換えることができる.

また，境界層内では関数 $y(x)$ が急激に変化するので，導関数 $y'(x)$ の絶対値が大きくなり，$y'(x)$ と比較して $y(x)$ を無視することができる．すなわち，微分方程式 (4-2-1) の 3 項のうち前 2 項が卓越平衡にある．したがって，境界層における式 (4-2-1) の近似式は

$$\varepsilon y'' + p_0 y' = 0, \qquad y(0) = C \tag{4-2-5}$$

となり，その厳密解

$$y_b(x) = C + H\big(\exp(-p_0 x/\varepsilon) - 1\big) \tag{4-2-6}$$

を求めることができる．ここに，H は積分定数である.

式 (4-2-6) の $\exp(-p_0 x/\varepsilon)$ の形から，解 $y_b(x)$ は $x = O(\varepsilon)$ のとき急激に変化することがわかるので，境界層の幅 $\delta(\varepsilon)$ は

$$\delta = O(\varepsilon) \tag{4-2-7}$$

と判明する.

[*1] 後に，もっと広い範囲で精度を保つことが判明する.

C) 漸近接続

最後に境界層理論の要諦である**漸近接続**を行う.

ここまで，独立変数 x の定義域を，A) 外域 $(\delta \ll x \leq 1)$ と B) 境界層 $(x = O(\delta))$ に分割し，それぞれの区間 (領域) において精度よい近似解を求めることができた．ところが，これらそれぞれの区間においてのみ精度が保証される近似解が，実はその区間をはるかに超えた範囲にわたって精度よい近似解となることが数多くの実例において明らかになる．これは一般に漸近級数でしばしば観察することができるめざましい特長である．その結果，外域解と境界層内の解のいずれもが精度を保つ**中間区間**が存在する．このいわば外域と境界層が“重なる”区間において，外域解と境界層内の解が**関数として完全に (恒等的に) 一致する**，という境界条件 (漸近接続条件) を課すことにより，残る積分定数を決定し，変数 x の全区間にわたる**統一解**を得ることができる.

この問題に即して具体的に説明すると，中間区間とは変数 x の値自体は小さいものの x/ε の値は大きい区間,

$$x \to 0+, \quad x/\varepsilon \to +\infty, \quad \varepsilon \to 0+$$

すなわち

$$\varepsilon \ll x \ll 1, \quad \varepsilon \to 0+ \tag{4-2-8}$$

の条件を満たす区間のことである．たとえば,

$$x = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \tag{4-2-9}$$

の区間がそれにあたる.

この中間区間，すなわち条件 (4-2-8) を満たす変数 x の区間において二つの解を漸近接続する．そして，この接続条件が境界層内の解に対する第二の境界条件を与える.

x が条件式 (4-2-8) を満たす区間にあるとき，境界層内の解 $y_b(x)$(4-2-6) と外域解 $y_o(x)$(4-2-3) はそれぞれ

$$y_b(x) \sim \lim_{x/\varepsilon \to +\infty} y_b(x) = C - H \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{4-2-10}$$

$$y_o(x) \sim \lim_{x \to 0+} y_0(x) = D\exp\left(\int_0^1 \frac{q(t)}{p(t)} dt\right) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{4-2-11}$$

となる．$y_b(x)$ と $y_o(x)$ がともにもとの微分方程式 (4-2-1) の精度よい近似解となるためには，中間区間において式 (4-2-10) と (4-2-11) が関数 (この場合は定数) として完全に一致しなければならない．この条件から積分定数 H が定まる.

$$H = C - D\exp\left(\int_0^1 \frac{q(t)}{p(t)} dt\right) \tag{4-2-12}$$

結局，微分方程式 (4-2-1) の境界層理論による近似解は,

$$y_b(x) \sim C\exp\left(\frac{-p_0 x}{\varepsilon}\right) + D\left(1 - \exp\left(\frac{-p_0 x}{\varepsilon}\right)\right)\exp\left(\int_0^1 \frac{q(t)}{p(t)}dt\right), \quad x = O(\varepsilon) \quad \varepsilon \to 0+ \tag{4-2-13a}$$

$$y_o(x) \sim D\exp\left(\int_x^1 \frac{q(t)}{p(t)}dt\right) \qquad (0 < x \le 1) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{4-2-13b}$$

のペアとなる（図 4-2）.

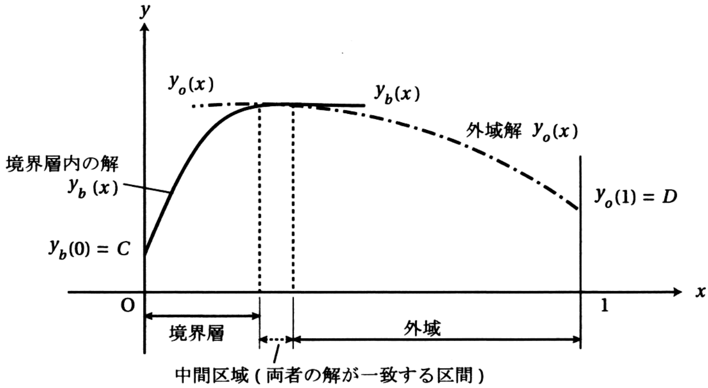


図 4-2　境界層内の解 $y_b(x)$ と外域解 $y_o(x)$

さらに，これら分割した区間ごとの解 (4-2-13a,b) を一つに統一することにより，x の定義域である $0 \le x \le 1$ の全区間で成立する**統一解** $y_u(x)$ を得ることができる.

$$y_u(x) = y_b(x) + y_o(x) - y_m(x) \tag{4-2-14}$$

ここに $y_m(x)$ は，境界層内の解と外域解が双方ともに精度を保つ中間区間の解

$$y_m(x) = C - H = D\exp\left(\int_0^1 \frac{q(t)}{p(t)}dt\right) \tag{4-2-15}$$

である．これらを代入すると，統一解 $y_u(x)$ は，

$$y_u(x) = D\exp\left(\int_x^1 \frac{q(t)}{p(t)}dt\right) + \left[C - D\exp\left(\int_0^1 \frac{q(t)}{p(t)}dt\right)\right]\exp\left(\frac{-p_0 x}{\varepsilon}\right) \tag{4-2-16}$$

となる.

境界層内の解 $y_b(x)$ および外域解 $y_o(x)$ (4-2-13a,b) と比較すると，統一解 $y_u(x)$ が，境界層 $(x = O(\varepsilon))$ では

$$y_u(x) - y_b(x) = O(\varepsilon) \tag{4-2-17a}$$

また，外域 $(\delta \ll x \le 1)$ では

$$y_u(x) - y_o(x) = O(\varepsilon) \tag{4-2-17b}$$

であることを確かめることができる.

なお，境界層内の解 (4-2-6) が $\exp(-p_0x/\varepsilon)$ という関数形をもつことから，$p(x)>0$ のとき $x=1$（定義域の右端）の近傍に境界層をもつことは不可能であることがわかる．

こうして，最初に仮定したごとく，**$x=0$ の近傍に唯一の境界層をもつ解**を導くことができた．

逆に，$p(x)<0$ の場合を吟味してみよう．いま，境界層の支配方程式 (4-2-5) に $x=1$ の境界条件を課すと，

$$\varepsilon y''+p_1y'=0, \qquad p_1=p(1)<0, \quad y(1)=D \tag{4-2-5a}$$

となる．その解は，

$$y_b(x)=D+H\left(\exp\left(p_1(1-x)/\varepsilon\right)-1\right) \tag{4-2-6b}$$

となり，$x=1$ の近傍に境界層をもつことがわかる．この場合は逆に $x=0$ 近傍に境界層をもつことは不可能である．■

4-3　境界層理論の数学的意味　漸近接続

前節で展開した境界層理論の基本解法への理解を深めるべく，本節では定数係数をもつ 2 階斉次線形微分方程式を取り上げ，**境界層を形成する関数** $y(x)$ の厳密解と比較しつつ，境界層理論による近似解のもつ意味を詳しく考察する．

次の定数係数 2 階斉次線形微分方程式

$$\varepsilon y''+(\varepsilon+2)y'+2y=0, \qquad y(0)=0, \quad y(1)=1 \qquad \varepsilon\to 0+ \tag{4-3-1}$$

には，$x=0$ の近傍に境界層を形成する厳密解

$$y_e(x)=\frac{e^{-x}-e^{-2x/\varepsilon}}{1/e-e^{-2/\varepsilon}} \tag{4-3-2}$$

が存在する（図 4-3）．

この厳密解 $y_e(x)$ には，ε が 0 に近づくにつれて $x=0$ の近傍 $(x\le O(\delta), \delta=O(\varepsilon))$ で急激に変化する，言い換えれば，その導関数の絶対値が非常に大きくなる成分 $e^{-2x/\varepsilon}$ が存在する．このような狭い区間を**境界層**と，また δ を境界層の厚さと呼ぶことはすでに述べた．また，その外側の区間 $(\delta\ll x\le 1)$ を**外域**と呼び，そこでは関数 $y_e(x)$ はゆっくり変化し，その導関数の絶対値は $O(1)$ であることもすでに述べた通りである．

つまり，この厳密解 $y_e(x)$ には二つの成分，すなわち，区間全体 [0, 1] にわたってゆっくり変化する関数 e^{-x} と，境界層 $(x\le O(\delta))$ の中で急激に変化する関数 $e^{-2x/\varepsilon}$ が含まれている．

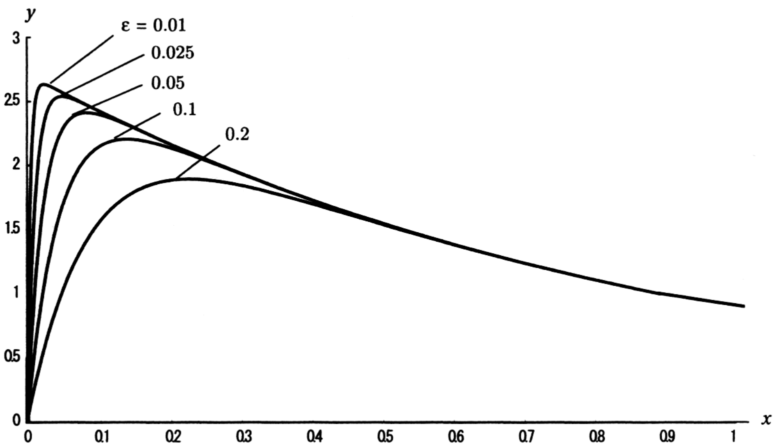


図 4-3　境界層を形成する厳密解 (4-3-2)

さて，境界層理論という近似解法は，微分方程式の解を x と ε の 2 変数の関数（漸近級数）とみなし，その $\varepsilon \to 0+$ の極限をとることにより，区間全体 [0, 1] にわたる近似解（統一解）$y_u(x)$ を求めるものと解釈することができる．そこで，どのようにして漸近接続が可能になるのかをみるために，まず微分方程式の解の**外極限**と**内極限**という二つの概念の説明から始めることにする．

■［外極限］

解 $y_e(x)$ の独立変数 x を境界層の外側（外域 $\delta \ll x \leq 1$）に固定したまま $\varepsilon \to 0+$ の極限をとったもの

$$y_o = \lim_{\varepsilon \to 0} y_e(x) = e^{1-x} \tag{4-3-3}$$

を**解の外極限**と呼ぶ．式 (4-3-2) と (4-3-3) を比較すると，厳密解 $y_e(x)$ とその外極限 y_o との差

$$\left| y_e(x) - y_o(x) \right| = \left| (e^{1-x} + e^{1-2x/\varepsilon}) / (e^{-1+2/\varepsilon} - 1) \right| \tag{4-3-3a}$$

は外域（$\delta \ll x$）において $\varepsilon \to 0+$ の極限で指数関数的に小さい．

同様に，微分方程式 (4-3-1) の独立変数 x を境界層の外側（外域 $\delta \ll x \leq 1$）に固定したまま $\varepsilon \to 0+$ の極限をとったもの

$$2y_o' + 2y_o = 0 \tag{4-3-4}$$

を**微分方程式**(4-3-1) の**外極限**と呼ぶ．なお，解の外極限 (4-3-3) は微分方程式の外極限 (4-3-4) の解である．

さて，微分方程式 (4-3-1) の外極限 (4-3-4) は，もとの微分方程式 (4-3-1) と比べ階数が一つ下がり 1 階微分方程式になっているので，境界条件 $y(0)=0$, $y(1)=1$ を両方ともに満たすことはできない．つまり，厳密解 (4-3-2) の外極限 y_o は，$y(1)=1$ を満たすが $y(0)=0$ は満たさない．

このことは，$\varepsilon=0$ とおいた，摂動項をもたない微分方程式 (4-3-4) の解 y_o が，区間全体 [0, 1] にわたっては（少なくとも $y=0$ 近傍においては）厳密解の $\varepsilon\to0+$ の極限とよく一致していないことを意味する．その事実がとりもなおさず，微分方程式 (4-3-1) が**特異摂動**問題であることを示している．この，厳密解 $y(x)$ の $\varepsilon\to0+$ の極限をとると不連続が現れる，という特異な振る舞いは，微分方程式 (4-3-1) の最高階の項が $\varepsilon=0$ で突然消滅することに由来することは明らかである．

［内極限］

実際には，厳密解 $y_e(x)$ は $x=0$ の近傍に境界層を形成することにより境界条件 $y(0)=0$ を満足する．そこで次に，この境界層を詳しく調べるために**内極限**を考える．内極限とは，$x\le O(\delta)$ の区間内に x を固定したまま $\varepsilon\to0+$ の極限をとることである．

ここで，境界層内における解 $y(x)$ の振る舞いを記述するのにふさわしい**内変数** t

$$x=\varepsilon t \tag{4-3-5}$$

を導入する．

境界層内では $x\le O(\delta), \delta=O(\varepsilon)$，すなわち，$x=O(\varepsilon)$ であるから，内変数 t は $t=O(1)$，つまり**通常の変数**であり，$\varepsilon\to0+$ の極限で $y(x)$ は x の関数としては急激に変化するが，t の関数としてはゆっくり変化する．これは 4-1 節「流体の境界層と境界層理論」において，短い長さの尺度（境界層の厚さ）δ を導入したことに対応している．

さて，まず，厳密解 $y_e(x)$ (4-3-2) において内変数 t を固定しつつ $\varepsilon\to0+$ の極限をとると，その内極限 $y_b(x)$ を得る．

$$y_b(x)\equiv z_b(t)=\lim_{\varepsilon\to0+}y_e(\varepsilon t)=e-e^{1-2t} \tag{4-3-6}$$

ここに $z_b(t)$ は $y_b(x)$ の表式において変数 x に εt を代入したものである．

同様に微分方程式 (4-3-1) の変数 x を内変数 t に変換すると，

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)\frac{dz}{dt}+2z=0 \tag{4-3-7}$$

を得る．ここに，$z(t)$ と $y(x)$ の関係は，$z_b(t)$ と $y_b(x)$ の関係と同様に

$$z(t)\equiv y(x) \tag{4-3-8}$$

であり，それぞれの変数による微分の間の関係は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{dz}{dt},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2z}{dt^2} \tag{4-3-9}$$

である．

微分方程式 (4-3-7) において内変数 t を固定しつつ $\varepsilon\to 0+$ の極限をとることにより，微分方程式 (4-3-1) の内極限

$$\frac{d^2z_b}{dt^2}+2\frac{dz_b}{dt}=0 \tag{4-3-10}$$

を得る．解の内極限 $z_b(t)$(4-3-6) は微分方程式 (4-3-10) と同時に境界条件 $z_b(0)=0$ を満たしている．

■ [漸近接続]

解析的に厳密解を得ることができない微分方程式の近似解を体系的に求めるための手段として境界層理論が非常に有用である理由は，そのままでは厳密解を得ることができない微分方程式の外極限と内極限をとると，それぞれ厳密解を得られることが多いからである．いったん，**内極限**微分方程式の解 $y_b(x)$ と**外極限**微分方程式の解 $y_o(x)$ を得ることができれば，両者を**漸近接続**することにより全区間にわたる近似解である**統一解**を得ることができる．

漸近接続は**中間極限**，つまり外域においては変数 x の小さい極限である一方，境界層においては変数 t の大きい極限

$$x\to 0+,\quad t=x/\varepsilon\to+\infty,\quad \varepsilon\to 0+ \tag{4-3-11}$$

で定義される**境界層と外域が“重なる”区間**で行う．実際に中間極限をとるには，たとえば，

$$x=\sqrt{\varepsilon}u \tag{4-3-12}$$

とし，u を固定して $\varepsilon\to 0+$ の極限をとればよい．そのとき変数 x は条件 (4-3-11) を満たしていることがわかる．

いま，解の外極限 y_o (4-3-3) と解の内極限 $y_b(x)\equiv z_b(t)$ (4-3-6) を比較すると両者の中間極限は確かに一致している．

$$\lim_{x\to 0+} y_o(x)=\lim_{t\to+\infty} z_b(t)=e \tag{4-3-13}$$

このように，$y_o(x)$ と $y_b(x)$ が共通・同一の極限をもつゆえ漸近接続という手続きが可能になるわけである．そして，この接続条件が境界層内の解に対する第二の境界条件を与える．

もし境界層内の解と外域解が双方ともに精度を保つ区間，すなわち境界層と外域が

“重なる” 区間が存在しなければ，漸近接続により全区間にわたる近似解を得ることができなくなるのであるから，**境界層と外域が “重なる” 区間**が実際に存在するか否かが境界層理論のキーポイントとなる．

■［高次近似解］

漸近接続についてさらに詳しく調べるために，微分方程式 (4-3-1) の解を ε に関する高次のすべてのオーダーについて完全に級数展開してみよう．

まず，外域解を ε のベキ級数（漸近級数）展開

$$y_o(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} y_{o,k}(x)\varepsilon^k \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{4-3-14}$$

の形で求める．そのとき，境界条件 $y(1)=1$ は，各項に対して以下となる．

$$y_{o,0}(1)=1, \quad y_{o,k}(1)=0 \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{4-3-15}$$

ここに，式 (4-3-3) における $y_o(x)$ は式 (4-3-14) の展開の第 1 項 $y_{o,0}(x)$ に対応するものであり，式 (4-3-14) 左辺の $y_o(x)$ とは異なることに注意されたい．

式 (4-3-14) を微分方程式 (4-3-1) に代入し，ε の次数ごとに整理すると，微分方程式とその $x=1$ における境界条件の系列

$$2y'_{o,0}(x)+2y_{o,0}(x)=0, \qquad y_{o,0}(1)=1$$

$$2y'_{o,k}(x)+2y_{o,k}(x)=-\left(y''_{o,k-1}(x)+y'_{o,k-1}(x)\right), \quad y_{o,k}(1)=0 \quad (k=1,2,\ldots) \tag{4-3-16}$$

を得る．そして，これらの微分方程式はそれぞれ容易に解くことができる（巻末付録 B1）．

$$y_{o,0}(x)=e^{1-x}, \quad y_{o,k}(x)=0 \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{4-3-17}$$

すなわち，展開の第 1 項 $y_{o,0}(x)$ がベキ級数展開のすべての次数にわたり正しい解であり，それだからこそ展開の第 1 項 $y_{o,0}(x)$（もとの $y_o(x)$ に対応する）と厳密解との差が指数関数的に小さかったのである．

$$\left|y(x)-y_o(x)\right|=o(\varepsilon^k) \qquad (k=1,2,\ldots) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{4-3-18}$$

次に，**境界層内の解**を ε のベキ級数（漸近級数）展開

$$z_b(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} z_{b,k}(t)\varepsilon^k \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{4-3-19}$$

の形で求める．そのとき，境界条件 $z_b(0)=0$ は各項に対して以下となる．

$$z_{b,k}(0)=0 \qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{4-3-20}$$

式 (4-3-19) を微分方程式 (4-3-7) に代入し ε の次数ごとに整理すると，微分方程式とそ

の $t=0$ における境界条件の系列

$$z_{b,0}''(t)+2z_{b,0}'(t)=0, \qquad z_{b,0}(0)=0$$
$$z_{b,k}''(t)+2z_{b,k}'(t)=-\left(z_{b,k-1}'(t)+2z_{b,k-1}(t)\right), \quad z_{b,k}(0)=0 \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{4-3-21}$$

を得，これらの解は容易に求めることができる（巻末付録式 (B3-2)）．

$$z_{b,0}(t)=C_0\left(1-e^{-2t}\right)$$
$$z_{b,k}(t)=\int_0^t \left(C_k e^{-2u}-z_{b,k-1}(u)\right)du \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{4-3-22}$$

ここに $C_k(k=0,1,2,\ldots)$ は積分定数である．

さて，この境界層内の解 $z_b(t)$ と外域解 $y_o(x)$ を，ε の次数ごとに漸近接続することができるか否かを調べるために，式 (4-3-17) の $y_o(x)=y_{o,0}(x)$ に $x=\varepsilon t$ を代入し，それを ε についてベキ級数展開する．

$$y_o(x)=e^{1-x}=e\left(1-\varepsilon t+\frac{\varepsilon^2 t^2}{2!}-\frac{\varepsilon^3 t^3}{3!}+\cdots\right) \tag{4-3-23}$$

一方，式 (4-3-22) の第 1 式において $t\to+\infty$ の極限をとると，

$$z_{b,0}(t)\sim C_0 \qquad t\to+\infty \tag{4-3-24}$$

を得る．

式 (4-3-24) と式 (4-3-23) の第 1 項を比較することにより，積分定数 C_0 を決定することができる．

$$C_0=e \tag{4-3-25}$$

こうして，式 (4-3-22) の第 1 式である

$$z_{b,0}(t)=e\left(1-e^{-2t}\right) \tag{4-3-26}$$

が定まると，その結果と式 (4-3-22) の第 2 式から $z_{b,1}(t)$ を求めることができる．

$$z_{b,1}(t)=\frac{C_1+e}{2}\left(1-e^{-2t}\right)-et \tag{4-3-27}$$

さきほどと同様に $t\to+\infty$ の極限をとり，式 (4-3-23) の第 2 項と比較すると，

$$C_1=-e \tag{4-3-28}$$

を得，$z_{b,1}(t)$ が定まる．

$$z_{b,1}(t)=-et \tag{4-3-29}$$

以下，ε に関するすべての次数について順々に

$$z_{b,k}(t)=\frac{e(-1)^k t^k}{k!} \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{4-3-30}$$

が定まる（数学的帰納法により確認せよ）．その無限級数の和を計算すると，境界層内の解 $z_b(t)$ は

$$z_b(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} z_{b,k}(t)\varepsilon^k = e\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{(-1)^k t^k}{k!} - e^{1-2t} = e^{1-\varepsilon t} - e^{1-2t} \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{4-3-31}$$

となる．厳密解 (4-3-2) と比べると，境界層内の解 $z_b(t)$(4-3-31) は，境界層内部（$t = O(1)$）のみならず，より大きな t（$t = O(\varepsilon^{-\alpha}), 0 < \alpha < 1$，すなわち，$\varepsilon \ll x = \varepsilon t$）についても精度を保っていることがわかる．

$$\left|y_e(\varepsilon t) - z_b(t)\right| = \left|(e^{1-\varepsilon t} - e^{1-2t})/(e^{-1+2/\varepsilon} - 1)\right| \tag{4-3-31a}$$

そして，外域解 $y_o(x)$ もまた $\varepsilon \ll x \leq 1$ ($\varepsilon \to 0+$) の範囲で精度を保っている．

結論として，境界層内の解と外域解が双方とも精度を保っている区間（$\varepsilon \ll x \ll 1$ ($\varepsilon \to 0+$)）が確かに存在するので，それぞれの ε に関する展開式は，ε に関するすべての次数について漸近接続を行うことできるわけである．

この例題では境界層内の解と外域解の ε に関するすべての次数の展開項を求めることができたため，境界層と外域が重なる区間の存在を明確に示すことができた．しかし，一般にはこのような幸運にめぐまれることは少ない．その場合，特異摂動法の常套手段であるが，まず，境界層と外域が重なる区間の存在を仮定して漸近接続を行い，その結果得られた解がその仮定と矛盾しないことを示す，という方法をとる．

最後に，これらの解の表式を一つに統一して，区間 $0 \leq x \leq 1$ 全体で成立する統一解 $y_u(x)$ を得ることができる．

$$y_u(x) = y_b(x) + y_o(x) - y_m(x) \tag{4-3-32}$$

ここに $y_m(x)$ は，境界層と外域が重なる領域における解である．

4-4　内部境界層

流体の境界層はその壁付近，すなわち独立変数の定義域の端近傍に現れる．一方，境界層を**微分方程式の解が急激に変動する狭い区間**と一般化することにより，最高階の導関数に微小係数 ε がかかる微分方程式を解く近似解法に成長した**微分方程式の境界層理論**においては，独立変数の定義域の端近傍のみならず，内部にも境界層が現れうる．本節ではその内部境界層を考察する．

再び 4-2 節で考察した最も一般的な 2 階斉次線形微分方程式にもどる．

$$\varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad y(-1) = C, \quad y(1) = D \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{4-4-1}$$

ただし，説明の便宜上変数 x の定義域を $-1 \leq x \leq 1$ とする[*1]．

[*1] 任意の閉区間は変数の一次変換により区間 $0 \leq x \leq 1$ ないし $-1 \leq x \leq 1$ に移すことができるので，式 (4-2-1) および (4-4-1) の定義域の設定は一般性を失わない．

すでに 4-2 節で，$p(x) \neq 0$ のとき，この問題の解 $y(x)$ は定義域の端に（$p(x) > 0$ ならば左端 $x = -1$ の近傍に，$p(x) < 0$ ならば右端 $x = 1$ の近傍に）唯一の境界層をもち，定義域の内部には境界層が存在しないことを示した．

本節では，$p(x)$ が唯一の零点 $x = 0$ をもち，その近傍で

$$p(x) \sim \mu x \qquad x \to 0 \qquad (\mu \neq 0) \tag{4-4-2}$$

と振る舞う場合を考察する．なお，$x = 0$ は $q(x)$ の零点ではないものとする．

$$q(x) \sim \nu \neq 0 \qquad x \to 0 \tag{4-4-3}$$

さて，μ の符号により二つのケースが考えられる．

1) $\mu > 0$：

このとき，$x = -1$ を含む区間 $-1 \leq x < 0$ で $p(x) < 0$，また $x = 1$ を含む区間 $0 < x \leq 1$ で $p(x) > 0$ である．したがって，左端 $x = -1$ の近傍にも右端 $x = 1$ の近傍にも境界層は存在しない．

このとき，$x = 0$ の両側に二つの外域が存在するので，それぞれに式 (4-2-3) 型の解

$$y_{o-}(x) = C\exp\left(-\int_{-1}^{x} \frac{q(s)}{p(s)} ds\right) \qquad (x < 0) \tag{4-4-4a}$$

$$y_{o+}(x) = D\exp\left(\int_{x}^{1} \frac{q(s)}{p(s)} ds\right) \qquad (x > 0) \tag{4-4-4b}$$

を得る．式 (4-4-4a) には $x = -1$，式 (4-4-4b) には $x = 1$ における境界条件をそれぞれ課してある．

次に $x = 0$ の近傍を考察すべく，そこに存在することが想定される境界層の厚さを δ として，新しい変数 t を導入する．

$$x = \delta t \tag{4-4-5}$$

変数 t は，境界層内の解の変化を記述するのに適した短いスケールの変数である．同時に

$$z(t) \equiv y(x) \tag{4-4-6}$$

と定義し，これらを微分方程式 (4-4-1) で $x \to 0$ の極限をとったものに代入すると，

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} z'' + \mu t z' + \nu z = 0 \tag{4-4-7}$$

を得る．微分記号は変数 t による．

ここで，卓越平衡の原理により，ともに微小量である δ と ε の相対的大きさを考察する．

A）もし，$\varepsilon \ll \delta^2$ ならば微分方程式 (4-4-7) は

$$\mu t z' + \nu z = 0$$

と近似できる．その解は

$$z = C_1 t^{-\nu/\mu} \quad (C_1\text{: 定数})$$

であるが，$\mu > 0$ であるから，

$$\nu > 0 \text{ ならば，} \quad |z| \to \infty \quad t \to 0$$

となり，解として適さないし，

$$\nu < 0 \text{ ならば，} \quad |z| \to \infty \quad t \to \pm\infty$$

となり，左右いずれの外域解とも漸近接続することができない．

したがって，このケースは不適である．

B）もし，$\varepsilon \gg \delta^2$ ならば微分方程式 (4-4-7) は

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} z'' = 0$$

と近似できる．その解は

$$z = C_2 t + C_3 \quad (C_2, C_3\text{: 定数})$$

であり，この場合も

$$|z| \to \infty \quad t \to \pm\infty$$

となり，左右いずれの外域解とも漸近接続することができない．したがって，このケースも不適である．以上の考察から，

C）$\varepsilon = O(\delta^2)$ でなければならないことがわかる．つまり境界層の厚さ δ は ε の平方根のオーダーである．ゆえに

$$\varepsilon = \delta^2 \tag{4-4-8}$$

とおくことができる．これまでの例題において境界層厚 δ と微小係数 ε との関係は $\delta = O(\varepsilon)$ であるものが多かったが，本例に限らずさまざまな関数関係 $\delta(\varepsilon)$ をもちうる（演習問題 4-4）．

式 (4-4-8) によれば，式 (4-4-5) は

$$x = \sqrt{\varepsilon}\, t \tag{4-4-5a}$$

となる．

このとき微分方程式 (4-4-7) は

$$z'' + \mu t z' + \nu z = 0 \tag{4-4-9}$$

となる．これまでの例と異なり微分方程式に 3 項が残っているのでその取り扱いはやや煩雑になる．

まず，変数 t を変数

$$u=\sqrt{\mu}t \tag{4-4-10}$$

に変換し，さらに，$z(t)$ を

$$z(t)=\exp\left(-u^2/4\right)s(u) \tag{4-4-11}$$

とおくと，$z(t)$ の微分方程式 (4-4-9) は，$s(u)$ の微分方程式

$$s''-\left(\frac{u^2}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\nu}{\mu}\right)s=0 \tag{4-4-12}$$

に変換される．ここに，微分は変数 u による．

微分方程式 (4-4-12) は放物円筒関数（parabolic cylinder functions, 巻末付録 A-4）の微分方程式であり，その一般解は放物円筒関数 $U(1/2-\nu/\mu,u)$ と $U(1/2-\nu/\mu,-u)$ の一次結合である（ただし，ν/μ は自然数でないとする）．

$$s(u)=H_1U(1/2-\nu/\mu,u)+H_2U(1/2-\nu/\mu,-u) \tag{4-4-13}$$

こうして得た**境界層内の解**(4-4-13) と**外域解**(4-4-4a,b) が双方ともに精度を保つ区間が存在すること，すなわち，それぞれの解の**中間極限**が一致することを示すことができれば，境界層理論による内部境界層問題の統一解を得ることができる．

そこで，次に放物円筒関数の $u\to+\infty$ における漸近級数展開の主要部（式 (A4-4,5)）

$$U(k,u)\sim\exp(-u^2/4)u^{-k-1/2} \qquad u\to+\infty \tag{4-4-14a}$$

$$U(k,-u)\sim\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(k+1/2)}\exp(u^2/4)u^{k-1/2} \qquad u\to+\infty \tag{4-4-14b}$$

を用いると，

$$z(t)\sim H_1\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu/\mu+1)}\left(-\sqrt{\mu}t\right)^{-\nu/\mu} \qquad t\to-\infty \tag{4-4-15a}$$

$$z(t)\sim H_2\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu/\mu+1)}\left(\sqrt{\mu}t\right)^{-\nu/\mu} \qquad t\to+\infty \tag{4-4-15b}$$

となる．ここで式 (4-4-5a) を用いて変数を t から x にもどすと，

$$z(t)\equiv y(x)\sim H_1\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu/\mu+1)}\left(\sqrt{\mu/\varepsilon}\right)^{-\nu/\mu}(-x)^{-\nu/\mu} \qquad x\to-\infty \tag{4-4-16a}$$

$$z(t)\equiv y(x)\sim H_2\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu/\mu+1)}\left(\sqrt{\mu/\varepsilon}\right)^{-\nu/\mu}x^{-\nu/\mu} \qquad x\to+\infty \tag{4-4-16b}$$

を得る．

次に，$x=0$ の両側の二つの外域解 (4-4-4a,b) において，

$$-\int_{-1}^{x}\frac{q(s)}{p(s)}ds \sim -\frac{\nu}{\mu}\log(-x) \qquad x\to 0- \tag{4-4-17a}$$

$$\int_{x}^{1}\frac{q(s)}{p(s)}ds \sim -\frac{\nu}{\mu}\log x \qquad x\to 0+ \tag{4-4-17b}$$

および,

$$\int_{-1}^{x}\frac{q(s)}{p(s)}ds-\frac{\nu}{\mu}\log(-x) \sim \int_{-1}^{0}\left(\frac{q(s)}{p(s)}-\frac{\nu}{\mu s}\right)ds \qquad x\to 0- \tag{4-4-18a}$$

$$\int_{x}^{1}\frac{q(s)}{p(s)}ds+\frac{\nu}{\mu}\log x \sim \int_{0}^{1}\left(\frac{q(s)}{p(s)}-\frac{\nu}{\mu s}\right)ds \qquad x\to 0+ \tag{4-4-18b}$$

に注意しつつ，中間極限 ($x\to 0\pm$) をとると,

$$\begin{aligned} y_{o-}(x) &= C\exp\left(-\int_{-1}^{x}\frac{q(s)}{p(s)}ds\right) \\ &\sim C(-x)^{-\nu/\mu}\exp\left(-\int_{-1}^{0}\left(\frac{q(s)}{p(s)}-\frac{\nu}{\mu s}\right)ds\right) \qquad x\to 0- \end{aligned} \tag{4-4-19a}$$

$$\begin{aligned} y_{o+}(x) &= D\exp\left(\int_{x}^{1}\frac{q(s)}{p(s)}ds\right) \\ &\sim Dx^{-\nu/\mu}\exp\left(\int_{0}^{1}\left(\frac{q(s)}{p(s)}-\frac{\nu}{\mu s}\right)ds\right) \qquad x\to 0+ \end{aligned} \tag{4-4-19b}$$

を得る．式 (4-4-19a,b) は，次のように定数を選択することにより，それぞれ式 (4-4-16a,b) に一致することがわかる.

$$C\exp\left(-\int_{-1}^{0}\left(\frac{q(s)}{p(s)}-\frac{\nu}{\mu s}\right)ds\right) = H_1\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu/\mu+1)}\left(\sqrt{\mu/\varepsilon}\right)^{-\nu/\mu} \tag{4-4-20a}$$

$$D\exp\left(\int_{0}^{1}\left(\frac{q(s)}{p(s)}-\frac{\nu}{\mu s}\right)ds\right) = H_2\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu/\mu+1)}\left(\sqrt{\mu/\varepsilon}\right)^{-\nu/\mu} \tag{4-4-20b}$$

すなわち，境界層内の解の中間極限 (4-4-16a,b) と外域解の中間極限 (4-4-19a,b) は関数として恒等的に一致し，漸近接続が完成した．これにより式 (4-4-13) 中の係数が定まり，境界層内の解

$$\begin{aligned} y_b(x) &= \frac{\Gamma(-\nu/\mu+1)}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{\mu/\varepsilon}\right)^{\nu/\mu}\exp\left(-\mu x^2/(4\varepsilon)\right) \\ &\cdot\left[C\exp\left(-\int_{-1}^{0}\left[\frac{q(s)}{p(s)}-\frac{\nu}{\mu s}\right]ds\right)U\left(1/2-\nu/\mu,\sqrt{\mu/\varepsilon}x\right)\right. \\ &\left.+D\exp\left(\int_{0}^{1}\left[\frac{q(s)}{p(s)}-\frac{\nu}{\mu s}\right]ds\right)U\left(1/2-\nu/\mu,-\sqrt{\mu/\varepsilon}x\right)\right] \end{aligned} \tag{4-4-21}$$

を得る.

その結果，外域解 (4-4-4a,b)，境界層内の解 (4-4-21) および漸近接続の条件 (4-4-20a,b) から，内部境界層をもつ微分方程式 (4-4-1) の変数の定義域全体 ($-1\le x\le 1$) で成立する統一解

$$y_u(x)=\frac{\Gamma(-\nu/\mu+1)}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{\mu/\varepsilon}\right)^{\nu/\mu}\exp\left(-\mu x^2/(4\varepsilon)\right)$$
$$\cdot\left[C\exp\left(-\int_{-1}^{x}\left[\frac{q(s)}{p(s)}-\frac{\nu}{\mu s}\right]ds\right)U\left(1/2-\nu/\mu,\sqrt{\mu/\varepsilon}\,x\right)\right.$$
$$\left.+D\exp\left(\int_{x}^{1}\left[\frac{q(s)}{p(s)}-\frac{\nu}{\mu s}\right]ds\right)U\left(1/2-\nu/\mu,-\sqrt{\mu/\varepsilon}\,x\right)\right] \tag{4-4-22}$$

を得る（演習問題 4-5）.

こうして，微分方程式 (4-4-1) が，(4-4-2,3) および $\mu>0$ の条件を満たすとき，$x=0$ の近傍に**内部境界層**が存在することを示すことができた.

2) $\mu<0$：

このとき，$x=-1$ を含む区間 $-1\le x<0$ で $p(x)>0$，また $x=1$ を含む区間 $0<x\le 1$ で $p(x)<0$ となる．したがって，左端 $x=-1$ の近傍および右端 $x=1$ の近傍の両方に境界層が存在する.

この場合にも，1) で実施したのと同様に $x=0$ の近傍に内部境界層が存在すると仮定して解析を進めることができるが，ただちに内部境界層は存在しないことが判明する.

[例題 4-2] 内部境界層問題・厳密解との比較

厳密解が得られている内部境界層問題を取り上げ，境界層理論による近似解と厳密解を比較する.

2 階斉次線形微分方程式

$$\varepsilon y''+2axy'+\left(\frac{a^2}{\varepsilon}x^2+c\right)y=0 \tag{4-4-23}$$

の一般解は，変数 t

$$t=x/\sqrt{\varepsilon} \tag{4-4-24}$$

を用いて，

$$y=\exp\left(-\frac{1}{2}at^2\right)\left(A\exp\left(\sqrt{a-c}\,t\right)+B\exp\left(-\sqrt{a-c}\,t\right)\right) \tag{4-4-25}$$

と表すことができる．ここに，A,B は積分定数である.

微分方程式 (4-4-23) において

$$\varepsilon=0.1,\quad a=0.5,\quad c=0.4 \tag{4-4-26}$$

と選ぶならば，微分方程式 (4-4-23) は 2 階微分の係数が微小量であり，$x=0$ において 1 階微分の係数が 0 になる，典型的な内部境界層問題となる.

そこで，具体的に境界値問題

$$0.1y'' + xy' + (2.5x^2 + 0.4)y = 0 \tag{4-4-23a}$$

$$-1 \le x \le 1, \quad y(-1) = 2, \quad y(1) = 1$$

の近似解を式 (4-4-22) により求めることにする．この問題では，

$$\varepsilon = 0.1, \quad \mu = 2a = 1.0, \quad \nu = c = 0.4 \tag{4-4-27}$$

また，

$$p(x) = x, \quad q(x) = 2.5x^2 + 0.4 \tag{4-4-28}$$

であるから，境界層近似による統一解 (4-4-22) は

$$y_u(x) = \frac{\Gamma(0.6)}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{10}\right)^{0.4}\exp\left(-(5/4)(3x^2-1)\right)\cdot\left[2U\left(0.1,\sqrt{10}x\right) + U\left(0.1,-\sqrt{10}x\right)\right] \tag{4-4-22a}$$

また，厳密解 (4-4-25) は

$$y_e = \exp(-2.5x^2)\left(A\exp x + B\exp(-x)\right)$$
$$A = \frac{(e-2/e)e^{2.5}}{e^2 - e^{-2}}, \quad B = \frac{(2e-1/e)e^{2.5}}{e^2 - e^{-2}} \tag{4-4-25a}$$

となる．

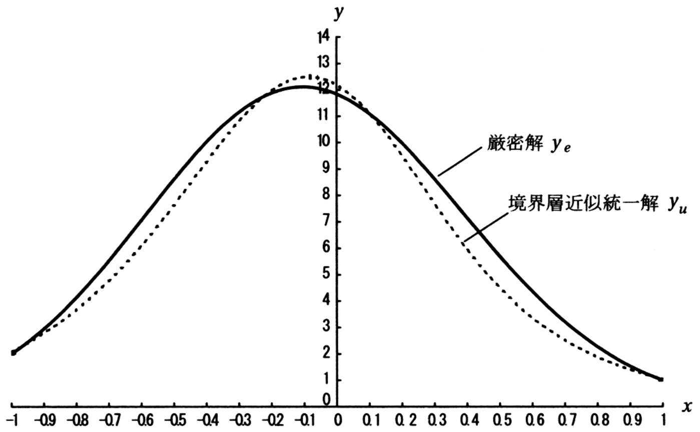


図 4-4　内部境界層問題（例題 4-2）の厳密解 y_e と境界層近似統一解 y_u

図 4-4 は，内部境界層問題 (4-4-23a) の境界層近似による統一解 y_u(4-4-22a) と厳密解 y_e(4-4-25a) を比較する．内部境界層の幅は微小量 ε の平方根程度であり，この問題では 0.3 となるので，あまりシャープな境界層ではないにもかかわらず，両者はよく一致している．■

4-5　非線形境界層問題

境界層理論は非線形微分方程式にも適用可能である．しかも，以下の取り扱いから明らかになるように，たとえば式 (4-5-1) の y^2 を任意の（非線形）関数 $f(y)$ で置き換えても一向に不都合は生じないように，かなり広範な非線形微分方程式に適用可能であることが理解できるであろう（例題 4-3）．

2 階非線形斉次微分方程式

$$\varepsilon y'' + y' + y^2 = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{4-5-1}$$

は y' の係数が正であるので，その解は $x = 0$ の近傍に唯一の境界層をもつ．

■ ［外域］

外域では関数 $y(x)$ は急激に変化しないので y, y', y'' はいずれも $O(1)$ である．それゆえ，外域では

$$y' + y^2 = 0, \qquad x \le 1, \quad y(1) = 2 \tag{4-5-2}$$

が微分方程式 (4-5-1) の精度のよい近似式となる．もともと 2 階であった微分方程式は，この近似により階数が一つ下がり 1 階微分方程式になったので，その一般解

$$y_o(x) = \frac{1}{x - C} \tag{4-5-3}$$

には，積分定数が一つだけ含まれている．この一般解 (4-5-3) に**外域に含まれる境界** $x = 1$ における境界条件 $y(1)=2$ を課すと，

$$y_o(x) = \frac{1}{x - 1/2} \tag{4-5-4}$$

を得る[*1]．

因みに，微分方程式 (4-5-1) の非線形項 y^2 が，より一般的な $f(y)$ の場合にはその一般解は

$$-\int^{y} \frac{1}{f(t)}\,dt = x + C \qquad (C: \text{定数}) \tag{4-5-3a}$$

となる．

[*1] 係数に特異性のない微分方程式 (4-5-1) の外域解 (4-5-3) に特異点 $x = C$ が現れ，統一解 (4-5-11) まで引き継がれている．境界（初期）条件によりその位置 C が移動する（本問題の境界条件では 1/2）**可動特異点**（movable singularity），別名**自然発生特異点**（spontaneous singularity）は非線形微分方程式に特有の特異点である．

■［境界層］

次に，境界層内の解を考える．境界層内 $(x=O(\delta))$ では，関数 $y(x)$ が急激に変化し，導関数の絶対値が大きくなるので，$y'(x)$ と比較して $y^2(x)$ を無視することができる．したがって，微分方程式 (4-5-1) の境界層内における精度よい近似式は，

$$\varepsilon y'' + y' = 0, \quad y(0) = 0 \tag{4-5-5}$$

なり，その解は，**境界層に含まれる境界** $x=0$ における境界条件 $y(0)=0$ を課すと

$$y_b(x) = H\left(\exp(-x/\varepsilon) - 1\right) \tag{4-5-6}$$

となる．なお，微分方程式 (4-5-5) は 2 階微分方程式のままなので，積分定数 H が一つ残っている．

さて，式 (4-5-6) の $\exp(-x/\varepsilon)$ の形から，解 $y_b(x)$ は $x=O(\varepsilon)$ のとき急激に変化することがわかるので，境界層の幅 $\delta(\varepsilon)$ は

$$\delta = O(\varepsilon)$$

である．

■［漸近接続］

次に，境界層の右端と外域の左端にあり両者における解が双方ともに精度を保つことが期待される区間（たとえば $x=O(\sqrt{\varepsilon})$）において，境界層内の解 $y_b(x)$ と外域解 $y_o(x)$ との漸近接続を行う．x がこの区間 $(x=O(\sqrt{\varepsilon}))$ にあるとき，両者は

$$y_b(x) \sim -H \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{4-5-7a}$$

$$y_o(x) \sim -2 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{4-5-7b}$$

となる．したがって，この区間において式 (4-5-7a) と (4-5-7b) は積分定数 H を

$$H = 2 \tag{4-5-8}$$

と定めることにより関数として完全に一致する（**漸近接続**）．こうして積分定数 H が決定した $y_b(x)$ と $y_o(x)$ は，ともにもとの微分方程式 (4-5-1) の解の精度よい近似式となる．

結局，微分方程式 (4-5-1) の境界層近似による解は，

$$\begin{aligned} &y_b(x) \sim 2\left(\exp(-x/\varepsilon) - 1\right), \quad x = O(\varepsilon) \qquad \varepsilon \to 0+ \\ &y_o(x) \sim \frac{1}{x - 1/2}, \quad 0 < x \le 1 \qquad \varepsilon \to 0+ \end{aligned} \tag{4-5-9}$$

となる．

さらに，これらの解の表式を一つに統一して，区間 $0 \le x \le 1$ 全体で成立する統一解 $y_u(x)$ を得ることができる．

$$y_u(x) = y_b(x) + y_o(x) - y_m(x) \tag{4-5-10}$$

ここに $y_m(x)$ は，境界層と外域が重なる領域における解である．

$$y_m(x) = -2$$

これらを代入し，統一解

$$y_u(x) = 2\exp(-x/\varepsilon) + \frac{1}{x - 1/2} \tag{4-5-11}$$

を得る．$y_b(x)$ および $y_o(x)$ の表式 (4-5-9) と比較すると，この $y_u(x)$ が，境界層 $(x = O(\varepsilon))$ では

$$y_u(x) - y_b(x) = O(\varepsilon)$$

また，外域 $(\delta \ll x \le 1)$ では

$$y_u(x) - y_o(x) = O(\varepsilon)$$

であることを確かめることができる．

[例題 4-3] 非線形境界層問題・厳密解との比較

厳密解をもつ非線形境界層問題を取り上げ，境界層理論による近似解と厳密解を比較する．2 階非線形微分方程式

$$\varepsilon y'' + y' + f(y) = 0, \quad f(y) = \frac{9}{100\varepsilon}\left(y - y^{-5/3}\right) \tag{4-5-12}$$

の一般解は媒介変数 t を介して

$$\frac{x}{\varepsilon} = \frac{5}{4}\log(t^4 - 6t^2 + 4C_1 t - 3) + C_2 \tag{4-5-13a}$$

$$y = (t^3 - 3t + C_1)^{3/2}(t^4 - 6t^2 + 4C_1 t - 3)^{-9/8} \tag{4-5-13b}$$

と表すことができる．ここに，C_1, C_2 は積分定数である．

微分方程式 (4-5-12) において $\varepsilon = 0.1$ とすれば，非線形項 $f(y)$ の係数は $O(1)$ となり，微分方程式 (4-5-12) は 2 階微分の係数のみが微小量の典型的な境界層問題となる．

そこで，具体的に境界値問題

$$0.1y'' + y' + f(y) = 0, \quad f(y) = \frac{9}{10}\left(y - y^{-5/3}\right) \tag{4-5-12a}$$

$$0 \le x \le 1, \quad y(0) = 10, \quad y(1) = 1.03$$

の近似解を境界層理論により求めることにする．なお，**外域に含まれる境界** $x = 1$ における境界条件を $y(1) = 1.03$ とやや中途半端な値にしたのは，$x \to +\infty$ の極限で厳密解が $y \to 1$ に漸近するという性質をもつための措置である．

微分方程式 (4-5-12a) の y' の係数が正であるから，その解は $x=0$ の近傍に唯一の境界層をもつ．

まず，外域では関数 $y(x)$ は急激に変化することはないので y, y', y'' はいずれも $O(1)$ である．それゆえ，

$$y_o' + \frac{9}{10}\left(y_o - y_o^{-5/3}\right) = 0, \quad x \le 1, \quad y_o(1) = 1.03 \tag{4-5-14}$$

が微分方程式 (4-5-12a) の外域における精度のよい近似式となる．この近似により階数が一つ下がり 1 階微分方程式になった (4-5-14) の一般解は

$$-\int^{y_o} \frac{1}{s - s^{-5/3}} ds = \frac{9}{10}x + C \tag{4-5-15}$$

である．これに**外域に含まれる境界** $x=1$ における境界条件 $y_o(1) = 1.03$ を課すと積分定数 C が定まり，外域解

$$-\int_{1.03}^{y_o} \frac{1}{s - s^{-5/3}} ds = \frac{9}{10}(x-1) \tag{4-5-16}$$

を得る．

次に，境界層内の解について考察する．境界層内 $(x = O(\delta))$ では関数 $y(x)$ が急激に変化し導関数の絶対値が大きくなるので，$y'(x)$ と比較して $f(y)$ を無視することができる．したがって，微分方程式 (4-5-12a) の境界層内における精度よい近似式は，先の例題と同じく，

$$\varepsilon y_b'' + y_b' = 0, \quad \varepsilon = 0.1 \tag{4-5-5 再掲}$$

となり，その解は，**境界層内の端点** $x=0$ における境界条件 $y_b(0) = 10$ を課すと

$$y_b(x) = H\left(\exp(-10x) - 1\right) + 10 \tag{4-5-17}$$

となる．なお，微分方程式 (4-5-5) は 2 階微分方程式のままなので，積分定数 H が一つ残っている．

さて，式 (4-5-17) の $\exp(-10x)$ の形から，解 $y_b(x)$ は $x = O(0.1)$ のとき急激に変化することがわかり，境界層の幅 δ は $\delta = O(0.1)$ である．

次に，境界層と外域の中間区間で，境界層内の解 $y_b(x)$ と外域解 $y_o(x)$ との漸近接続を行う．中間区間において両者は

$$y_b(x) \sim 10 - H \tag{4-5-18a}$$

$$y_o(x) \sim y_A = 1.273 \tag{4-5-18b}$$

となる．なお，y_A の値は式

$$\int_{1.03}^{y_A} \frac{1}{s - s^{-5/3}} ds = \frac{9}{10} \tag{4-5-18c}$$

から数値積分により求めたものである．

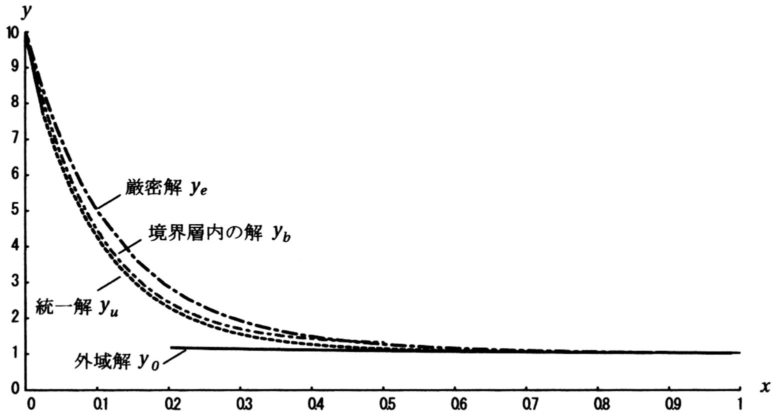


図 4-5 非線形境界層問題（例題 4-3）厳密解 y_e と近似解（境界層内の解 y_b，外域解 y_o，統一解 y_u）

$y_b(x)$ と $y_o(x)$ がともにもとの微分方程式 (4-5-12a) の解の精度のよい近似式となるためには，中間区間において式 (4-5-18a) と (4-5-18b) が一致しなければならない．

この**漸近接続**の条件から積分定数 H が定まる．

$$H = 10 - 1.273 = 8.727 \tag{4-5-19}$$

結局，微分方程式 (4-5-12a) の境界層内の解は，

$$y_b(x) = 8.727\big(\exp(-10x) - 1\big) + 10, \quad x = O(0.1) \tag{4-5-20}$$

となる．なお外域解は (4-5-16) である．

さらに，これら二つの解から区間 $0 \le x \le 1$ 全体で成立する統一解

$$y_u(x) = y_b(x) + y_o(x) - y_m(x) \tag{4-5-21}$$

を得ることができる．ここに $y_m(x)$ は，境界層と外域が重なる領域における解

$$y_m(x) = 1.273$$

である．これらを代入し，統一解

$$y_u(x) \sim 8.273\exp(-x/\varepsilon) + y_o(x) \tag{4-5-22}$$

を得る．図 4-5 において，境界層理論近似により得られた，境界層内の解 (4-5-20)，外域解 (4-5-16) および統一解 (4-5-22) と厳密解 (4-5-13a,b) を比較する．

境界層理論による統一解は厳密解をよく近似しているのみならず，その構成要素である境界層内の解と外域解の数学的意味づけが明瞭であるために，媒介変数で表示された厳密解よりも解の定性的特徴をずっと理解しやすいという利点がある． ■

4-6　宇宙工学への応用

本節で扱う例題は，支配方程式の最高階の微分係数に微小量がかかっていないので，本来の意味の境界層が存在するわけではない．しかし，外域解が狭い区間（内域）で破綻をきたす特異摂動問題であるので，この場合も内域と外域の漸近接続により統一解を求めなければならない．それゆえ，本章の例題としてふさわしいであろう．

具体的には，初速度のみを与えられた宇宙船が地球と月の万有引力の作用のもと地球から月に到達する古典力学の問題において，宇宙船の位置と経過時間の関係を考察する（[20]）．

宇宙船の月までの所要時間が十分短いため，地球と月の公転による移動距離は無視でき，地球から月まで一直線に到達するとみなすと，問題は 1 次元となる（図 4-6）．

宇宙船の運動方程式は，

$$m_S \frac{d^2X}{dT^2} = -\frac{Gm_S m_E}{X^2} + \frac{Gm_S m_M}{(R-X)^2} \tag{4-6-1}$$

と表すことができる．ここに，$m_E = 5.97 \times 10^{24}$kg，$m_M = 7.35 \times 10^{22}$kg，$m_S$ はそれぞれ地球，月，宇宙船の質量，$R = 1.92 \times 10^5$km は地球と月の重心間距離，X は地球の重心を原点とする宇宙船の位置，T は時間，$G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{m^3/(kg{\cdot}s^2)}$ は万有引力定数である．

力学変数 X, T を次式により

$$x = X/R \tag{4-6-2a}$$

$$t = T\sqrt{Gm_E/R^3} \tag{4-6-2b}$$

それぞれ規格化し，無次元変数 x, t を定義する．さらに，地球と月の質量の乖離に着目し，微小量 ε

$$\varepsilon \equiv \frac{m_M}{m_E} \cong 0.012 \ll 1$$

を定義すると，運動方程式 (4-6-1) を無次元化することができる．

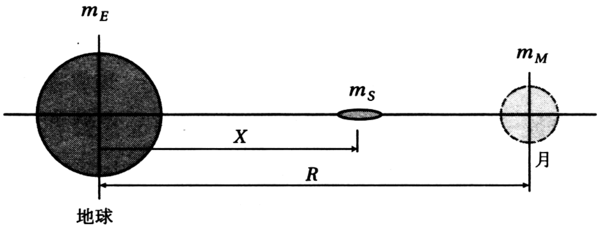


図 4-6　宇宙船の 1 次元軌道

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{\varepsilon}{(1-x)^2} \tag{4-6-3}$$

微分方程式 (4-6-3) の両辺に dx/dt を乗じた式

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{\varepsilon}{(1-x)^2}\right)$$

を

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} + \frac{\varepsilon}{1-x}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x} + \frac{\varepsilon}{1-x}\right)$$

と変形すると積分することができ，微分方程式

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon}{1-x} + E_0$$

を得る．ここに E_0 は無次元の力学的全エネルギーである．簡単のため，$E_0 = 0$ とすると，最終的に運動方程式 (4-6-3) は 1 階非線形常微分方程式（力学的エネルギー保存則）

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon}{1-x} \tag{4-6-4}$$

に帰着する．

さて，実用上からもまた微分方程式の取り扱い上からも，経過時間 $t(x)$ を地球からの距離 x の関数とみなすのが便利なので，以下では独立変数と従属変数の役割を入れ替える．

■ ［外域］

微分方程式 (4-6-4) の各項の微小量 ε を除く関数

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2t'(x)^2},\quad \frac{1}{x},\quad \frac{1}{1-x}$$

が $O(1)$ である区間，すなわち外域においては，各項の大きさを微小量 ε の次数で判断できる．そこで，経過時間の外域解 $t_o(x)$ を微小量 ε により漸近級数展開する．

$$t_o(x) = t_{o,0}(x) + \varepsilon t_{o,1}(x) + \cdots \tag{4-6-5}$$

式 (4-6-5) を微分方程式 (4-6-4) に代入すると，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t'_{o,0}(x)}\right)^2\left(1 - 2\varepsilon\frac{t'_{o,1}(x)}{t'_{o,0}(x)} + \cdots\right) = \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon}{1-x} \tag{4-6-6}$$

を得る．

式中の ε に関する次数の等しい項をまとめると，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t'_{o,0}(x)}\right)^2 = \frac{1}{x} \tag{4-6-7a}$$

$$-\frac{t'_{o,1}(x)}{\left(t'_{o,0}(x)\right)^3}=\frac{1}{1-x} \tag{4-6-7b}$$

…………

を得る．

まず，式 (4-6-7a) の解は，時間の基準点を $t_{o,0}(x=0)=0$ ととることにより，

$$t_{o,0}(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2} \tag{4-6-8}$$

と表すことができる．

式 (4-6-8) を (4-6-7b) に代入すると，

$$t'_{o,1}(x)=-\frac{x^{3/2}}{2\sqrt{2}(1-x)} \tag{4-6-9}$$

を得る．方程式 (4-6-9) を初期条件 $t_{o,1}(0)=0$ を考慮しつつ積分すると

$$t_{o,1}(x)=\frac{\sqrt{2}}{6}x^{3/2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x^{1/2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \tag{4-6-10}$$

を得る．

式 (4-6-8,10) をまとめると外域解 $t_o(x)$ の漸近級数展開の最初の 2 項

$$t_o(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}x^{3/2}+x^{1/2}-\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+O(\varepsilon^2) \tag{4-6-11}$$

を得る．

■［内域］

宇宙船が月に接近し，$1-x=O(\varepsilon)$ になると，月による万有引力が地球による万有引力に比べもはや微小量ではなくなる．その結果，外域解 $t_o(x)$(4-6-11) は $x\to 1-0$ の極限においてゆるやかにではあるものの発散する．この外域条件を満たさなくなる区間

$$1-x=O(\varepsilon)$$

すなわち内域において内変数 u

$$1-x=\varepsilon u \tag{4-6-12}$$

を導入すると，微分方程式 (4-6-4) は，

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2=\frac{1}{1-\varepsilon u}+\frac{1}{u} \tag{4-6-13}$$

となる．

内域解 $t_b(x)\equiv\tau_b(u)$ を微小量 ε により漸近級数展開し，

$$\tau_b(u) = \tau_{b,0} + \varepsilon\tau_{b,1}(u) + O(\varepsilon^2) \qquad (\tau_{b,0}\text{: 定数}) \tag{4-6-14}$$

式 (4-6-14) を (4-6-13) に代入し，$\varepsilon \to 0+$ の極限をとると，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau'_{b,1}(u)}\right)^2 = 1 + \frac{1}{u} \tag{4-6-15}$$

を得る．微分方程式 (4-6-15) の一般解は

$$\tau_{b,1}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\sqrt{u(u+1)} + \log\left(\sqrt{u} + \sqrt{u+1}\right) + C\right] \tag{4-6-16}$$

である．ここに C は積分定数である．なお，微分方程式 (4-6-15) に初期条件を課すことができず，積分定数を決定するためには漸近接続を待たなければならない．式 (4-6-16) を (4-6-14) に代入すると，内域解

$$\tau_b(u) = \tau_{b,0} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left[-\sqrt{u(u+1)} + \log\left(\sqrt{u} + \sqrt{u+1}\right) + C\right] + O(\varepsilon^2) \tag{4-6-17}$$

を得る．

■ ［漸近接続］

外域解 $t_o(x)$(4-6-11) および内域解 $t_b(x) \equiv \tau_b(u)$(4-6-17) の中間極限をとる．具体的には，$1 - x = O(\sqrt{\varepsilon})$，$u = O(1/\sqrt{\varepsilon})$ の変域を考えればよい．

まず，外域解 $t_o(x)$(4-6-11) の中間極限をとると，

$$\begin{aligned} t_o(x) &\sim \frac{\sqrt{2}}{3}\left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon u\right) + \varepsilon\left[\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(-2\log 2 + \log\varepsilon + \log u)\right] \\ &\sim \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{4}{3} - \log 2 + \frac{1}{2}\log\varepsilon\right) - u + \frac{1}{2}\log u\right] \end{aligned} \tag{4-6-18}$$

を得る．

次に内域解 $t_b(x) \equiv \tau_b(u)$(4-6-17) の中間極限をとると，

$$\begin{aligned} t_b(x) \equiv \tau_b(u) &\sim \tau_{b,0} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left[-\left(\frac{1-x}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right) + \left(\log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{1-x}{\varepsilon}\right) + C\right] \\ &\sim \tau_{b,0} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left[\left(-\frac{1}{2} + \log 2 + C\right) - u + \frac{1}{2}\log u\right] \end{aligned} \tag{4-6-19}$$

を得る．

外域解 $t_o(x)$ の中間極限 (4-6-18) と内域解 $t_b(x) \equiv \tau_b(u)$ の中間極限 (4-6-19) は，変数 u に関する関数形が一致しているので，積分定数を，

$$\tau_{b,0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

および

$$C=\frac{11}{6}-2\log 2+\frac{1}{2}\log\varepsilon$$

と選択することにより両者は完全に一致し，漸近接続に成功する．

その結果，内域解 (4-6-17) は最終的に

$$\tau_b(u)=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left[-\sqrt{u(u+1)}+\log\left(\sqrt{u}+\sqrt{u+1}\right)+\frac{11}{6}-2\log 2+\frac{1}{2}\log\varepsilon\right]+O(\varepsilon^2) \tag{4-6-20}$$

となる．

外域解 $t_o(x)$(4-6-11)，内域解 $t_b(x)$(4-6-20)，および中間極限

$$t_m(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left[-u+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}(-2\log 2+\log\varepsilon+\log u)\right] \tag{4-6-21}$$

から区間全体で成立する統一解

$$\begin{aligned}
t_u(x)&=t_o(x)+t_b(x)-t_m(x)\\
&=\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}-\log 2+\frac{1}{3}x^{3/2}+x^{1/2}-\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\,u-\sqrt{u(u+1)}+\log\left(\sqrt{u}+\sqrt{u+1}\right)+\frac{1}{2}\log\varepsilon\right]\\
&=\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\cdot\left[\frac{1}{2}-\log 2+\frac{1}{3}x^{3/2}+x^{1/2}-\log\left(1+\sqrt{x}\right)+\frac{1-x}{\varepsilon}\right.\\
&\qquad\left.-\sqrt{\frac{1-x}{\varepsilon}\left(\frac{1-x}{\varepsilon}+1\right)}+\log\left(\sqrt{\frac{1-x}{\varepsilon}}+\sqrt{\frac{1-x}{\varepsilon}+1}\right)+\frac{1}{2}\log\varepsilon\right]
\end{aligned} \tag{4-6-22}$$

を得る．

図 4-7 で統一解 $t_u(x)$(4-6-22) と外域解 $t_o(x)$(4-6-11) および内域解 $t_b(x)$(4-6-20) を比較する．宇宙船は地球から遠ざかるに従い減速した後，月に近づきゆるやかに加速し始める様子（$O(\varepsilon)$ の効果）を外域解はよく表現している．外域解は月のごく近傍（内域）を除き統一解とよく一致しているが，$x\to 1-0$ に近づくにつれて破綻をみせ，ついに $x=0.994$ 付近で $t_o'(x)=0$ すなわち速度が無限大となる．それと同時に統一解は外域解から内域解に乗り換えている．

なお，地球半径 $r_E=6.38\times 10^3$km，および月半径 $r_M=1.74\times 10^3$km を代入すると，地球表面と月面における無次元化された距離 $x\equiv X/R$ はそれぞれ

$$x_E\equiv r_E/R=0.033$$

$$x_M\equiv X_M/R=1-r_M/R=0.991$$

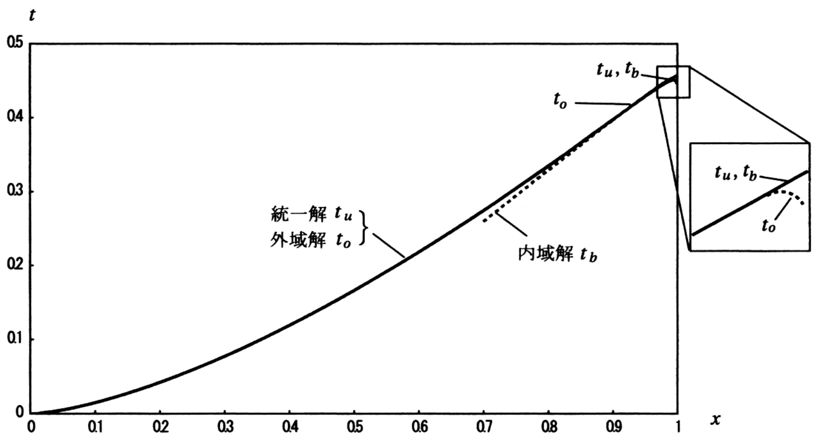


図 4-7　宇宙船の位置と経過時間

である．

本節の例から想像できるように，漸近接続という手法は広範な分野の特異摂動問題において活用しうる汎用的近似解法の指導原理である．後に，5-6 節「転回点問題」をはじめ数多くの例題において援用されるのを見出すであろう．

4-7　流体中の微小粒子に働く流体力（再び流体力学への応用）

本節では流体中に浮遊あるいは固定された微小粒子のまわりの流れの解析と特にその結果として得られる微小粒子に働く流体力に関する研究成果について概説する．

4-1 節で慣性項と粘性項の比のオーダーを評価する無次元量レイノルズ数 $Re = UL/\nu$ は，通常の流れにおいては少なくとも $O(100)$ となることを指摘した．すなわち通常の流れは高レイノルズ数の流れである．

ところが，静止流体中を微小粒子が沈降するときのように，ゆっくりとした相対流速（U：小）のもとにおかれた微小粒子（半径 a：小）の場合には，その粒子のまわりに形成される流れを特徴づける**局所レイノルズ数**

$$Re_l = \frac{Ua}{\nu} \ll 1 \tag{4-7-1}$$

は逆にごく小さくなり，**低レイノルズ数流れ**となる．このとき，微小粒子近傍（内域：$r = O(a)$）の流れにおいては，ナヴィエ-ストークス方程式 (4-1-1) 中の慣性項を無視した，**ストークス方程式**

$$0=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{4-7-2}$$

がナヴィエ-ストークス方程式の精度よい近似式となる．なお，4-1 節では 2 次元問題を考えたが，ここでは 3 次元問題を念頭に入れ，一般のベクトル表記を用いる．

微小粒子近傍 ($r=O(a)$) で精度のよい近似式であるストークス方程式 ($Re_l=0$ に対応する) の解自体は微小粒子表面の境界条件

$$\boldsymbol{v}=0,\quad r=a \qquad \text{(4-1-2a 再掲)}$$

および微小粒子から十分離れると一様流速 U に近づくという無限遠の境界条件

$$\boldsymbol{v}\to(U,0,0) \qquad r\to+\infty \qquad \text{(4-1-2b 再掲)}$$

を満足する．しかし，微小粒子から離れた領域 (外域：$r\gg a$) では無視することのできない慣性項の効果を取り入れるべく，ストークス方程式の解を主要部とするナヴィエ-ストークス方程式 (4-1-1) の局所レイノルズ数 $Re_l=Ua/\nu$ による漸近級数解 (**ストークス展開**) を求めると，第 2 項以降は無限遠の境界条件 (4-1-2b) を満足できない．すなわち，ストークス展開による近似解は $r\to+\infty$ で破綻をきたす．

本問題の外域の流れにおいて局所レイノルズ数を用いると慣性項 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ の粘性項 $\nu\nabla^2\boldsymbol{v}$ に対する比は $Re_l r/a$ であるから，$O(a/Re_l)$ より大きい r に対して摂動展開は破綻 (解の非一様性) をきたすのである．

そこで，外域 ($r\geq a/Re_l$) においては新たな変数，**オゼーン (Oseen) 変数**

$$s\equiv Re_l r/a \tag{4-7-3}$$

を導入し，オゼーン変数と局所レイノルズ数による漸近級数解 (**オゼーン展開**) を求め，これを内域の**ストークス展開**による漸近級数解と漸近接続する．

オゼーン展開による外域の漸近級数解を求めることのできるさまざまな問題について研究が進んでいる．中でも，流体中を二つの粒子が運動するとき流体を介してそれらの粒子間に働く力 (**流体力**) が，長い間興味の対象になってきた．

桑原 ([21]) は無限に広がる境界のない流体中を運動する二つの円筒 (2 次元問題) を，また金田・石井 ([22]) は二つの球 (3 次元問題) を考察し，いずれの場合も二つの粒子が流れに対して平行に並ぶときには引力，垂直に並ぶときには斥力を及ぼしあうことを発見した．

壁 (水底) の存在する場合にも研究が進み，コックス (Cox) ら ([23]) は壁から離れて運動する粒子を考察した．さらに柴田・メイ (Mei) ([24] [25]) は水底におかれた微小粒子が振動流すなわち波にさらされている問題を考察した．その結果，先の境界なし流れの場合と同様に，二つの粒子が流れに対して平行に並ぶときには引力を及ぼ

しあうことを発見した．さらに，流体を介するこの種の粒子間力が，乱流を形成しない低レイノルズ数流れの下で発生する砂紋 (rolling-grain ripples) 発生の素過程であることを示した ([26])．

第 4 章の演習問題

4-1　境界層問題

$$\varepsilon y'' + (x+1)^2 y' + y = 0, \quad y(0) = y(1) = 1 \qquad \varepsilon \to 0+$$

の $O(\varepsilon)$ の統一解 $y_u(x)$ を求めよ．

4-2　内部境界層問題

$$\varepsilon y'' + x y' - y = 0, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 2 \qquad \varepsilon \to 0+$$

の $O(\varepsilon)$ の統一解 $y_u(x)$ を求めよ．

4-3　非線形境界層問題

$$\varepsilon y'' - 2y' + \frac{1}{y} = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2 \qquad \varepsilon \to 0+$$

の $O(\varepsilon)$ の統一解 $y_u(x)$ を求めよ．

4-4　次の各境界値問題の解が $x = 0$ の近傍に境界層をもつために必要なパラメータ α の値の範囲を求めよ．また，そのときの境界層厚さの ε 依存性を求めよ．

(1)　$\varepsilon y'' + x^{\alpha} y' + y = 0, \quad y(0) = C, \quad y(1) = D, \quad 0 \le x \le 1 \qquad \varepsilon \to 0+$

(2)　$\varepsilon y'' + y' - x^{\alpha} y = 0, \quad y(0) = C, \quad y(1) = D, \quad 0 \le x \le 1 \qquad \varepsilon \to 0+$

4-5　式 (4-4-22) が，外域解 (4-4-4a,b)，境界層内の解 (4-4-21) および漸近接続の条件 (4-4-20a,b) からなる，内部境界層をもつ微分方程式 (4-4-1) の変数の定義域全体 ($-1 \le x \le 1$) で成立する統一解 $y_u(x)$ であることを証明せよ．

第5章

WKB法

WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) 法は境界層理論と同じく最高階の導関数に微小係数 ε がかかっている微分方程式，すなわち構造的特異摂動問題の漸近級数解を得る体系的近似解法である．ただ，その対象は**線形**微分方程式に限られる．

境界層問題においては，解である関数が急激に変動する（通常の摂動展開による漸近級数解が破綻する）区間，すなわち境界層の幅が $\varepsilon \to 0$ の極限で 0 に近づいたが，この区間の幅が $\varepsilon \to 0$ の極限で有限の大きさに留まる問題に対しては WKB 法を用いなければならない．逆に，WKB 法は解の関数が急激に変動する区間の幅にかかわらず適用可能なので線形境界層問題をも解くことができる．

もともと量子力学において開発された WKB 法を 5-1 節で概説し，5-2 節で微分方程式の近似解法として WKB 法を一般化する．さらに 5-3 節で典型的問題としてシュレディンガー型方程式の近似解を求め，これをもとに続く各節で，固有値問題（5-4 節），転回点問題（5-6 節）を解き，また 5-5 節では先に第 4 章で得た線形境界層問題の境界層理論による近似解を再現する．最後に 5-7 節で非斉次線形微分方程式の近似解を求める．

なお，微分方程式の一般的近似解法として WKB 法を学ぶためには，5-1 節を読みとばしてもかまわない．

5-1　量子力学の WKB 法

量子力学の基本方程式である定常シュレディンガー（Schrödinger）方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+V(x,y,z)\right]\phi(x,y,z)=E\phi(x,y,z) \tag{5-1-1a}$$

である．ここに $\phi(x,y,z)$ は質量 m の素粒子の波動関数，$V(x,y,z)$ はポテンシャル，E はエネルギー固有値，$\hbar = h/(2\pi), h = 6.626\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s}$ はプランク定数である．

本節では，プランク定数 h が極めて小さい値であることを利用してその 1 次元版

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \bigl(E - V(x)\bigr)\phi(x) \tag{5-1-1b}$$

の近似解を求める方法を考察する．

まず，式 (5-1-1b) 中のパラメータから作られる長さスケール，ド・ブロイ (de Broglie) 波長

$$L = \frac{2\pi\hbar}{p_0} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \tag{5-1-2}$$

は当該素粒子の波動としての広がりの大きさを表し，その大きさは 1 Å (= 10^{-10}m) 程度である．ここに $p_0 = \sqrt{2mE}$ は運動量の代表的大きさである．

いま仮にポテンシャルエネルギー $V(x)$ が定数ならば，微分方程式 (5-1-1b) は

$$\phi(x) = A_0\exp\left(\pm i\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}x\right) \sim A_0\exp\left(\pm i\frac{x}{L}\right) \tag{5-1-3}$$

という 1Å 程度の極めて短い波長 L を有する振動解をもつ．一方，ポテンシャルエネルギー $V(x)$ が変化する長さスケール $L_0 = V(x)/V'(x)$ は通常ド・ブロイ波長 L より極めて大きい．したがって，$L \ll L_0$ の条件下では

$$\phi(x) = A_0\exp\left(\pm i\frac{\sqrt{2m\bigl(E-V(x)\bigr)}}{\hbar}x\right) \tag{5-1-4}$$

が，微分方程式 (5-1-1b) の精度よい近似解となる．

そこで，長さの尺度に L，エネルギー E および $V(x)$ の尺度に $p_0^2/(2m)$ を用いて式 (5-1-1b) を無次元化し，

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\phi(x) = E\phi(x) \tag{5-1-5}$$

さらに精度よい近似解を求める．

まず，

A)　$E - V(x) > 0$ (5-1-6)

の場合を考えると，

$$p(x) = \sqrt{E - V(x)} \tag{5-1-7}$$

は粒子の (無次元化された) 運動量である[*1]．

[*1] 本書では，微分方程式論の慣例に従い 2 階常微分方程式の 1 階微分の係数を $p(x)$ と表記しているが，本節においては力学の慣例に従い運動量を p あるいは $p(x)$ と表記する．

そこで，解 (5-1-4) を一般化した

$$\phi(x) = A_0(x)\exp\left(\pm i\int^x p(t)dt\right) \tag{5-1-8}$$

の形の解を仮定し，式 (5-1-5) に代入すると，波動関数 $\phi(x)$ の振幅 $A_0(x)$ の満たすべき微分方程式

$$2p(x)\frac{dA_0(x)}{dx} + \frac{dp(x)}{dx}A_0(x) \mp i\frac{d^2A_0(x)}{dx^2} = 0 \tag{5-1-9a}$$

を得る．

さて，その条件については後に吟味することにして，式 (5-1-9a) の各項の中で振幅 $A_0(x)$ の 2 階微分である第 3 項が前の二つの項よりも十分小さいと仮定し，これを無視すると，

$$2p(x)\frac{dA_0(x)}{dx} + \frac{dp(x)}{dx}A_0(x) = 0 \tag{5-1-9b}$$

を得，その解である振幅

$$A_0(x) = \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \qquad (C：定数) \tag{5-1-10}$$

を求めることができ，波動関数 $\phi(x)$ の近似解は定数の係数を別にして

$$\phi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left(\pm i\int^x p(t)dt\right) \tag{5-1-11a}$$

と決定される．次元のある，もとの物理変数を使うならば，

$$\phi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}\int^x p(t)dt\right) \tag{5-1-11b}$$

である．

さて，この解を得るに際して行った「式 (5-1-9a) の第 3 項が第 1 項よりも十分小さい」という仮定が成立する条件

$$\left|2p(x)\frac{dA_0(x)}{dx}\right| \gg \left|\frac{d^2A_0(x)}{dx^2}\right| \tag{5-1-12a}$$

は，式 (5-1-10) を用いて（$d^2p(x)/dx^2$ を無視すると）

$$1 \gg \left|\frac{1}{p(x)^2}\frac{dp(x)}{dx}\right| \tag{5-1-12b}$$

であることがわかる．ここでも，次元のある，もとの物理変数を使うならば，

$$1 \gg \left|\frac{\hbar}{p(x)^2}\frac{dp(x)}{dx}\right| \tag{5-1-12c}$$

となる．ゆえに本近似の成立する条件 (5-1-12c) はド・ブロイ波長

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p(x)} \tag{5-1-13}$$

の長さにわたる運動量の変化率が十分に小さいこと，

$$1 \gg \left| \lambda \frac{1}{p(x)} \frac{dp(x)}{dx} \right| \tag{5-1-14}$$

である，と表現できる．

ところで，

$$E - V(x) = 0 \tag{5-1-15}$$

を満たす点では運動エネルギーが 0 となり，古典的な粒子はそれよりポテンシャルエネルギーの高い地点に進むことができず引き返すので，その点を**転回点**と呼ぶ．転回点付近では $p(x)$ が 0 に近づくので式 (5-1-14) の条件を満たすことはできないが，新たな手法を用いることによりやはり WKB 近似解を得ることができる．後に 5-6 節でその取り扱いを詳述する．

さて，古典的な粒子は転回点より先に進むことはできないが，量子的粒子はそれより先に侵入することができる．そこで次に，

B)　$$E - V(x) < 0 \tag{5-1-16}$$

の場合を考える．今度は

$$\tilde{p}(x) = \sqrt{V(x) - E} \tag{5-1-17}$$

とおくことにより，式 (5-1-14) の $p(x)$ を $\tilde{p}(x)$ で置き換えた不等式

$$1 \gg \left| \lambda \frac{1}{\tilde{p}(x)} \frac{d\tilde{p}(x)}{dx} \right| \tag{5-1-14a}$$

の条件のもとで，波動関数 $\phi(x)$ の近似解

$$\phi_B(x) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{p}(x)}} \exp\left(\pm \int^x \tilde{p}(t) dt \right) \tag{5-1-18a}$$

を得る．次元のある，もとの物理変数を使うならば，

$$\phi_B(x) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{p}(x)}} \exp\left(\pm \frac{1}{\hbar} \int^x \tilde{p}(t) dt \right) \tag{5-1-18b}$$

となる．

式 (5-1-11a,b) は振動解であったのに対して，式 (5-1-18a,b) は指数関数型の発散・減衰解である．発散する解は無限遠の境界条件を満たさないため棄却することができるので，残る減衰解が，全エネルギーよりもポテンシャルエネルギーの高い地点への**浸み込み**という量子的粒子の特性を表す．

5-2　WKB 法の一般化　局所破綻と広域破綻　指数関数型の解

前節の量子力学の問題においては，微分方程式 (5-1-1b) の 2 階微分の係数が極めて小さいために，その解が振動する波長程度の長さの移動に際しポテンシャルエネルギー $V(x)$ がほとんど変化しないことが WKB 近似法の基礎であった．したがって，次節で詳しく検討するシュレディンガー型方程式

$$\varepsilon^2 y''(x) = A(x)y(x), \quad A(x) \neq 0 \tag{5-2-1}$$

において $\varepsilon \to 0+$ の極限をとるとき，$A(x)$ の変化率 $A'(x)/A(x)$ が $O(1)$ であれば WKB 法を適用しうるはずである．

さて，境界層理論近似においては，外域解は $\varepsilon \to 0+$ の極限で滑らかなままであったが，境界層内の解は同じ極限をとると，ε とともに狭くなる境界層の中で不連続となった．つまり，境界層内の解 (4-3-6) は $\exp(-2x/\varepsilon)$ 型の指数関数を含むために，x を固定して $\varepsilon \to 0+$ の極限をとると勾配が無限に大きくなる，という**局所破綻**を起こした．

ところで，同じく最高階の導関数に微小係数 ε がかかっている線形微分方程式のうち式 (5-2-1) 型のものでは $\varepsilon \to 0+$ の極限で**広域破綻**を起こす．すなわち，この場合には，破綻する区間の幅が同じ極限で 0 に収束しない．

その事情をみるには，次の境界値問題の例

$$\varepsilon^2 y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-2-2}$$

が適当であろう．

微分方程式 (5-2-2) の厳密解は

$$y(x) = \cos(x/\varepsilon) - \cot(1/\varepsilon)\sin(x/\varepsilon), \quad \varepsilon \neq 1\big/(n\pi) \tag{5-2-3}$$

という振動する関数であり，$\varepsilon \to 0+$ の極限で，その波数 $1/\varepsilon$ が無限に大きくなるが，その破綻は区間全体 $[0,1]$ にわたって起きている．前節の解 (5-1-9b) において，$\hbar \to 0$ の極限で定義域全体にわたり波数 $2\pi/\lambda = p(x)/\hbar$ が発散したのと同様である．

この問題を境界層理論によって解くことができないことは，式 (5-2-2) で $\varepsilon = 0$ とおいて外域解を求めてみればわかる．なぜならばその解は，

$$y_o(x) = 0 \tag{5-2-4}$$

という，本来の解とはかけ離れた，いかなる意味でも近似解とは呼び難い，無意味な関数になってしまうからである．

換言すれば，式 (5-2-1) 型の微分方程式は，一般の 2 階線形微分方程式 (4-2-1) の 1 階微分の係数 $p(x) \equiv 0$ の場合に対応するゆえに境界層理論を適用することができない

のである．

さて，微分方程式

$$\varepsilon^2 y''(x) = A(x)y(x), \quad A(x) \neq 0 \tag{5-2-1 再掲}$$

にもどろう．もし，dA/dx が十分小さい場合には $A(x)$ はほぼ定数になり，そのとき，微分方程式 (5-2-1) の解は

$$y(x) \sim \exp\left(\pm\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{A(x)}\right) \tag{5-2-5}$$

となる．

この事実に基づき，もっぱら線形微分方程式の漸近級数解を得ることを目的とする WKB 法では，式 (5-2-5) を次のように一般化した**指数関数型の解**を仮定する．

$$y(x) \sim \exp(Q(x)/\delta) \qquad \delta \to 0+ \tag{5-2-6}$$

この手法は 19 世紀初頭にリゥヴィル (Liouville) らにより考案されたものである．ここで，$Q(x)$ は，$\varepsilon \to 0+$ の極限で破綻をきたす区間においてもゆっくり変動するもの，と仮定する．式 (5-2-3) の例では $\delta = \varepsilon$ である．

$Q(x)$ が実数ならば解 (5-2-6) は $O(\delta)$ の厚さの境界層を有する解，また $Q(x)$ が複素数ならば式 (5-2-3) のように $O(\delta)$ の波長で振動する関数を表す．

さて，式 (5-2-6) の指数の部分を δ に関して展開すると，

$$\frac{Q(x)}{\delta} \sim \frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k Q_k(x) = \frac{1}{\delta}Q_0(x) + Q_1(x) + \delta Q_2(x) + \cdots \qquad \delta \to 0+ \tag{5-2-7}$$

となり，解 $y(x)$ は

$$y(x) \sim \exp\left(\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k Q_k(x)\right) \qquad \delta \to 0+ \tag{5-2-8}$$

と表すことができる．

ところで，シュレディンガー型微分方程式 (5-2-1) の式 (5-2-8) 型の WKB 近似解を求めると，ほとんどの例において漸近級数 $\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k Q_k(x)$ は発散する．しかし，次節以降のさまざまな例が示すように多くの場合，級数の 2 項目までのみをとったもの $\sum_{k=0}^{1}\delta^k Q_k(x)$ が厳密解 $y(x)$ の著しく精度の高い近似解となる．

そこで，具体的に WKB 近似解が厳密解 $y(x)$ の精度よい近似解となる条件を明らかにしておこう．WKB 近似解 (5-2-8) が全定義域にわたり $y(x)$ の精度よい近似解であるためには，級数 $\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k Q_k(x)$ が全定義域にわたり一様に成立する漸近級数でなければならない．そのためには，

$$Q_0 \gg \delta Q_1, \quad Q_k \gg \delta Q_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \qquad \delta \to 0+ \tag{5-2-9}$$

を満足する必要がある．

ところが，WKB 近似解ではこの漸近級数 $\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k Q_k(x)$ が指数関数の肩に乗っているので，漸近級数の第 n 項まで残したもの $\sum_{k=0}^{n}\delta^k Q_k(x)$ が $y(x)$ の精度よい近似解であるためには，さらに次の第 $n+1$ 項に対する条件

$$\delta^n Q_{n+1}(x) \ll 1 \qquad \delta \to 0+ \tag{5-2-10}$$

が必要になる．この条件が満たされるとき初めて，

$$\exp\left(\delta^n Q_{n+1}(x)\right) = 1 + O\left(\delta^n Q_{n+1}(x)\right) \qquad \delta \to 0+ \tag{5-2-11}$$

となり，解 $y(x)$ と WKB 近似解 $\exp\left(\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\delta^k Q_k(x)\right)$ との相対誤差が 1 より十分小さくなるからである．

$$\frac{y(x) - \exp\left(\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\delta^k Q_k(x)\right)}{y(x)} \sim \delta^n Q_{n+1}(x) \qquad \delta \to 0+ \tag{5-2-12}$$

とくに，$n=0$ のとき，一般に

$$\delta^n Q_{n+1}(x) = Q_1(x) \ll 1 \qquad \delta \to 0+ \tag{5-2-13}$$

は成り立たないので，WKB 近似解では特別な場合（例：7-6 節）を除いて最低でも第 2 項（$k=1$）までとる必要がある．

$$\frac{Q(x)}{\delta} \sim \frac{1}{\delta}Q_0(x) + Q_1(x) \qquad \delta \to 0+ \tag{5-2-14}$$

なお，前節の量子力学における WKB 法で求めた解 (5-1-9), (5-1-16) は，(5-2-14) に対応する第 2 項まで残した近似解である．

因みに，WKB 法による漸近級数解の第 1 項のみを残した近似解 $\exp(Q_0(x)/\delta)$ は，光学あるいは一般に波動力学において波の屈折と反射の性質のみを取り入れた近似に対応するため，**幾何光学近似**（geometrical optics approximation）と呼ばれる．一方，WKB 法による漸近級数解の第 2 項まで残した近似解 $\exp(Q_0(x)/\delta + Q_1(x))$ は，さらに波の回折の効果を取り入れた近似に対応するため，**物理光学近似**（physical optics approximation）と呼ばれる．

漸近級数の観点からは，物理光学近似が WKB 法による漸近級数解の主要部に対応し，幾何光学近似が主要部の支配因子に対応する．

5-3 シュレディンガー型方程式

シュレディンガー型微分方程式の1次元版，つまり，y' の項がない2階斉次線形微分方程式で2階微分にかかる係数がごく小さいもの

$$\varepsilon^2 y''(x) = A(x)y(x), \quad A(x) \neq 0 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-2-1 再掲}$$

を詳しく調べる[*1].

前節の方法により，微分方程式 (5-2-1) の WKB 近似解を得ることができる．まず，

$$y(x) \sim \exp\left(\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k Q_k(x)\right) \qquad \delta \to 0+ \tag{5-2-8 再掲}$$

を x で微分すると，

$$y'(x) \sim \left(\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k Q_k'(x)\right)\exp\left(\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k Q_k(x)\right) \qquad \delta \to 0+ \tag{5-3-1a}$$

$$y''(x) \sim \left[\left(\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k Q_k'(x)\right)^2 + \frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k Q_k''(x)\right]\exp\left(\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k Q_k(x)\right) \qquad \delta \to 0+ \tag{5-3-1b}$$

を得る．これらを式 (5-2-1) に代入し，各項に共通の指数関数項 $\exp\left(\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k Q_k(x)\right)$ で両辺を割ると，

$$\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}Q_0'^2 + \frac{2\varepsilon^2}{\delta}Q_0'Q_1' + \frac{\varepsilon^2}{\delta}Q_0'' + \cdots = A(x) \tag{5-3-2}$$

を得る．左辺の最大項は明らかに第1項であるから，その第1項が右辺の $A(x)$ と卓越平衡になければならないので，δ と ε は同じオーダーである．そこで簡単のために

$$\delta = \varepsilon \tag{5-3-3}$$

と定める．これにより，式 (5-3-2) を ε に関するベキの等しい項ごとに整理すると

$$Q_0'^2 = A(x) \tag{5-3-4a}$$

$$2Q_0'Q_1' + Q_0'' = 0 \tag{5-3-4b}$$

$$2Q_0'Q_k' + Q_{k-1}'' + \sum_{m=1}^{k-1} Q_m'Q_{k-m}' = 0 \qquad (k \geq 2) \tag{5-3-4c}$$

となる．

漸化式 (5-3-4) により，各項 Q_k を順に求めることができる．まず式 (5-3-4a) から

$$Q_0(x) = \pm\int^x \sqrt{A(t)}\,dt \tag{5-3-5}$$

を得，続いて，式 (5-3-4b) と (5-3-5) から

---

*1 一般的な2階斉次線形微分方程式 $\varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (4-2-1) は変換 $y(x) = z(x)\exp\left[-\frac{1}{2}\int^x p(t)dt\right]$ により，$z(x)$ のシュレディンガー型方程式に変換することができる．

$$Q_1(x) = -\frac{1}{4}\log A(x) + C \tag{5-3-6}$$

を得る．ここに，C は積分定数である．

こうして，式 (5-3-5) と (5-3-6) から $y(x)$ の主要部，すなわち物理光学近似の一般解

$$y(x) \sim C_1 A(x)^{-1/4} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int^x \sqrt{A(t)}\,dt\right) + C_2 A(x)^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int^x \sqrt{A(t)}\,dt\right) \quad \varepsilon \to 0+ \tag{5-3-7}$$

を得ることができる．

二つの項は式 (5-3-5) の正負の符号に対応しており，C_1, C_2 は積分定数である．因みに，5-1 節「量子力学の WKB 法」で求めたシュレディンガー方程式の解 (5-1-9) ないし (5-1-16) は式 (5-3-7) に相当する．なお，漸化式 (5-3-4c) を解くことにより，より高次の近似解 $Q_k (k \geq 2)$ を順に得ることができる（演習問題 5-2）．

［例題 5-1］　定数係数の境界値問題

ここで，5-2 節で触れた次の境界値問題を再び取り上げる．

$$\varepsilon^2 y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-2-2 再掲}$$

微分方程式 (5-2-2) は (5-2-1) で $A(x)$ を -1 に置き換えたものである．そこで微分方程式 (5-2-1) の WKB 近似解の主要部 (5-3-7) にこの置き換えを行うと次式を得る．

$$y(x) \sim C_1(-1)^{-1/4} \exp\left(\frac{ix}{\varepsilon}\right) + C_2(-1)^{-1/4} \exp\left(-\frac{ix}{\varepsilon}\right) \tag{5-3-8}$$

さらに，境界条件 $y(0) = 1, y(1) = 0$ を課すと，漸近級数解の主要部のみですでに境界値問題 (5-2-2) の厳密解

$$y(x) = \cos(x/\varepsilon) - \cot(1/\varepsilon)\sin(x/\varepsilon), \quad \varepsilon \neq 1/(n\pi) \tag{5-2-3 再掲}$$

を得ている．■

［例題 5-2］　より複雑なシュレディンガー型方程式・厳密解との比較

シュレディンガー型微分方程式のうち厳密解が得られている例を取り上げ，WKB 近似解と厳密解を比較する．

2 階斉次線形微分方程式

$$\varepsilon y'' = (b^2 x^2 + b\varepsilon) y \tag{5-3-9}$$

の一般解は，

$$y = \exp\left(\frac{b}{2\varepsilon}x^2\right)\left(C_3 + C_4 \int_0^x \exp\left(-\frac{b}{\varepsilon}t^2\right)dt\right) \tag{5-3-10}$$

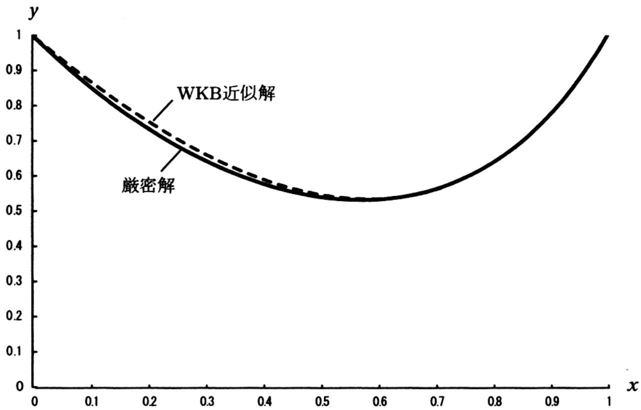


図 5-1 WKB 近似解と厳密解（ケース 1）

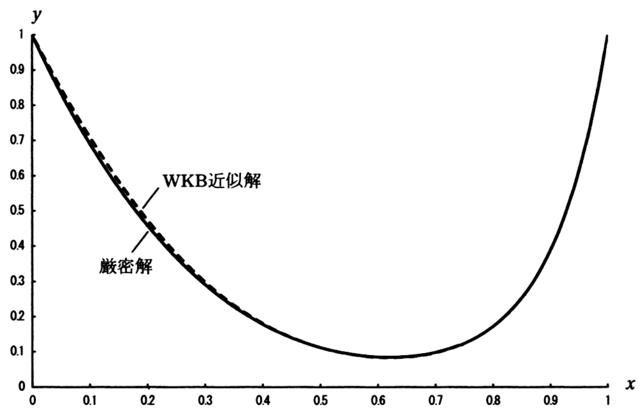


図 5-2 WKB 近似解と厳密解（ケース 2）

である．ここに，C_3, C_4 は積分定数である．

一方，微分方程式 (5-3-9) の WKB 近似解 (5-3-7) は次式となる．

$$
\begin{aligned}
&y(x)\\
&\sim C_1(b^2x^2+b\varepsilon)^{-1/4}\exp\left(\frac{b}{\varepsilon}\int_0^x\sqrt{t^2+\frac{\varepsilon}{b}}dt\right)+C_2(b^2x^2+b\varepsilon)^{-1/4}\exp\left(-\frac{b}{\varepsilon}\int_0^x\sqrt{t^2+\frac{\varepsilon}{b}}dt\right)\\
&=(b^2x^2+b\varepsilon)^{-1/4}\\
&\qquad\cdot\left[C_1\sqrt{x+\sqrt{x^2+\frac{\varepsilon}{b}}}\exp\left(\frac{bx}{2\varepsilon}\sqrt{x^2+\frac{\varepsilon}{b}}\right)+\frac{C_2}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+\varepsilon/b}}}\exp\left(-\frac{bx}{2\varepsilon}\sqrt{x^2+\frac{\varepsilon}{b}}\right)\right]\\
&\qquad\qquad\varepsilon\to 0+ \qquad\qquad (5\text{-}3\text{-}11)
\end{aligned}
$$

区間 $0 \le x \le 1$ において境界条件 $y(0) = F,\ y(1) = G$ を課すと，解 (5-3-10,11) に含まれる積分定数は以下のように定まる．

$$C_1 = \left[G(b^2+b\varepsilon)^{1/4} - F\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1+\varepsilon/b}}}\exp\left(\frac{-b\sqrt{1+\varepsilon/b}}{2\varepsilon}\right)\right]$$
$$\Bigg/\left[\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{b}}}\exp\left(\frac{b\sqrt{1+\varepsilon/b}}{2\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{b\sqrt{1+\varepsilon/b}}{2\varepsilon}\right)\Bigg/\sqrt{\left(1+\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{b}}\right)\frac{b}{\varepsilon}}\right] \tag{5-3-12a}$$

$$C_2 = \sqrt{\varepsilon}\left(F - C_1/\sqrt{b}\right) \tag{5-3-12b}$$

$$C_3 = F \tag{5-3-12c}$$

$$C_4 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{b}}\left(G\exp\left(-\frac{b}{2\varepsilon}\right) - F\right)\Bigg/\left[\int_0^1 \exp\left(\frac{-bt^2}{\varepsilon}\right)dt\right] \tag{5-3-12d}$$

計算例として，微分方程式 (5-3-9) 中の係数 ε, b の値と境界条件を表 5-1 のように 2 ケース選ぶ．

表 5-1　検証計算に用いた係数と境界条件

ケース	ε	b	F	G
1	$\sqrt{0.1}$	1	1	1
2	0.1	1	1	1

図 5-1, 5-2 は，それぞれシュレディンガー型微分方程式 (5-3-9) の境界値問題の WKB 近似解 (5-3-11) と厳密解 (5-3-10) を比較しているが，非常によく一致しているのがわかる．■

5-4　シュトゥルム-リゥヴィルの固有値問題

本節では，シュトゥルム-リゥヴィル（Sturm-Liouville）の固有値問題に WKB 法を適用する．

2 階斉次線形微分方程式

$$y''(x) - \lambda A(x)y(x) = 0, \quad A(x) < 0 \tag{5-4-1}$$

に斉次の境界条件

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{5-4-2}$$

を課すと，微分方程式 (5-4-1) が自明な解 $y(x) \equiv 0$ 以外に有意の解 $y(x)$ をもつためには λ は特別の値すなわち**固有値** λ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ に一致しなければならない．固有値 λ_n に対応する固有関数 $y_n(x)$ は区間 $(0, 1)$ に n 個の零点を有する（[10]）．

一方，微分方程式 (5-4-1) は

$$\varepsilon^2 = 1/\lambda \tag{5-4-3}$$

とおくと，微分方程式 (5-2-1) に一致する．したがって固有値 λ が大きな値をとるとき，前節の結果を用いてその固有関数を求めることができ，さらに固有値 λ そのものをも求めることができる．

さて，異なる固有値 λ_m, λ_n に対応する固有関数をそれぞれ $y_m(x), y_n(x)$ とすると，それらは

$$y_m''(x) - \lambda_m A(x) y_m(x) = 0 \tag{5-4-4a}$$

$$y_n''(x) - \lambda_n A(x) y_n(x) = 0 \tag{5-4-4b}$$

を満たす．そこで，式 (5-4-4a) に $y_n(x)$ を乗じたものから，式 (5-4-4b) に $y_m(x)$ を乗じたものを引くと

$$y_m''(x) y_n(x) - y_m(x) y_n''(x) - (\lambda_m - \lambda_n) A(x) y_m(x) y_n(x) = 0 \tag{5-4-5}$$

を得る．式 (5-4-5) を部分積分により 0 から 1 まで積分すると，

$$\left[y_m'(x) y_n(x) - y_m(x) y_n'(x)\right]_0^1 - (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 A(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \tag{5-4-6}$$

を得る．境界条件 (5-4-2) により，式 (5-4-6) の左辺第 1 項は 0 であり，かつ λ_m, λ_n は異なる値をとるので，次式

$$\int_0^1 A(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n) \tag{5-4-7}$$

すなわち，**固有関数の直交条件**を得る．ここで，固有関数には定数倍だけの自由度があることに注意して，

$$\int_0^1 |A(x)| y_m(x) y_m(x) dx = 1 \tag{5-4-8}$$

と規格化する．

さて，5-3 節の結果により，微分方程式 (5-4-1) の WBK 法による近似解 (5-3-7) に式 (5-4-3) を代入すると，

$$y(x) \sim C_1 A(x)^{-1/4} \exp\left(\sqrt{\lambda} i \int^x \sqrt{|A(t)|} dt\right) + C_2 A(x)^{-1/4} \exp\left(-\sqrt{\lambda} i \int^x \sqrt{|A(t)|} dt\right) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-4-9}$$

を得る．これは，積分定数を選びなおすことにより，

$$y(x) \sim C_1 |A(x)|^{-1/4} \sin\left(\sqrt{\lambda} \int_0^x \sqrt{|A(t)|} dt\right) + C_2 |A(x)|^{-1/4} \cos\left(\sqrt{\lambda} \int_0^x \sqrt{|A(t)|} dt\right) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-4-10}$$

と実数関数で表示することができる．これに境界条件 (5-4-2) を課すと，

$$\sqrt{\lambda_m}\int_0^1 \sqrt{|A(t)|}dt=(m+1)\pi \qquad (m=0,1,2,\ldots),\quad C_2=0$$

すなわち，固有値

$$\lambda_m=\left[\frac{(m+1)\pi}{\int_0^1 \sqrt{|A(t)|}dt}\right]^2 \tag{5-4-11}$$

を得る．またこの固有値 λ_m に対応する固有関数 $y_m(x)$ は

$$y_m(x)\sim C_1|A(x)|^{-1/4}\sin\left(\sqrt{\lambda_m}\int_0^x \sqrt{|A(t)|}dt\right) \qquad \lambda_m\to+\infty \tag{5-4-12}$$

であり，式 (5-4-8) により規格化すると C_1 が定まる．

$$C_1^2\int_0^1 \sqrt{|A(x)|}\sin^2\left(\sqrt{\lambda_m}\int_0^x \sqrt{|A(t)|}dt\right)dx=1 \tag{5-4-13a}$$

積分変数を x から

$$u=\sqrt{\lambda_m}\int_0^x \sqrt{|A(t)|}dt \tag{5-4-14}$$

に変換すると，

$$\frac{C_1^2}{\sqrt{\lambda_m}}\int_0^{(m+1)\pi}\sin^2 u\,du=1 \tag{5-4-13b}$$

となり，最終的に定数

$$C_1^2=\frac{2}{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{|A(t)|}dt} \tag{5-4-13c}$$

を定めることができる．

［例題 5-3］　シュトゥルム-リゥヴィルの固有値問題・厳密解との比較 (I)

固有値問題 (5-4-1,2) の最も簡単な例題として

$$A(x)=-k^2 \quad (\text{定数}) \tag{5-4-15}$$

を考える．その WKB 近似解によれば，固有値 (5-4-11) は

$$\lambda_m=\left((m+1)\pi/k\right)^2 \qquad m\to+\infty \tag{5-4-16}$$

また，固有関数 (5-4-12) は

$$y_m(x)\sim\frac{\sqrt{2}}{k}\sin(m+1)\pi x \qquad m\to+\infty \tag{5-4-17}$$

となる．

固有値 (5-4-16) および固有関数 (5-4-17) は，WKB 法近似により $m\to+\infty$ の極限で成立すべき結果であるが，$m=0$ およびすべての自然数について厳密解と一致している．

■

[例題 5-4] シュトゥルム-リゥヴィルの固有値問題・厳密解との比較 (II)

次に，$A(x)$ が分数関数の例

$$y''(x)+\lambda\frac{1}{(x+1)^4}y(x)=0,\quad y(0)=y(1)=0 \tag{5-4-18}$$

を考える．その WKB 近似解によれば，固有値は

$$\lambda_m=\bigl(2(m+1)\pi\bigr)^2 \qquad m\to+\infty \tag{5-4-19}$$

また，固有関数は

$$y_m(x)\sim 2(x+1)\sin\frac{2(m+1)\pi x}{x+1} \qquad m\to+\infty \tag{5-4-20}$$

となる．

再び，$m\to+\infty$ の極限で成立すべき WKB 近似解による固有値および固有関数が，$m=0$ およびすべての自然数について厳密解と一致している． ■

[例題 5-5] シュトゥルム-リゥヴィルの固有値問題・厳密解との比較 (III)

最後に，指数関数の係数をもつ例

$$y''(x)+\lambda e^{\mu x}y(x)=0,\quad y(0)=y(1)=0 \tag{5-4-21}$$

を考える．

その WKB 近似解によれば，固有値は

$$\lambda_m=\left(\frac{(m+1)\mu\pi}{2(e^{\mu/2}-1)}\right)^2 \qquad m\to+\infty \tag{5-4-22}$$

また，固有関数は

$$y_m(x)\sim Be^{-\mu x/4}\sin\left(\frac{2}{\mu}\sqrt{\lambda_m}\left(e^{\mu x/2}-1\right)\right),\quad B^2=\frac{\mu}{e^{\mu/2}-1} \qquad m\to+\infty \tag{5-4-23}$$

となる．

一方，微分方程式 (5-4-21) には厳密解が存在し，その一般解は，

$$z=\frac{2}{\mu}\sqrt{\lambda}e^{\mu x/2} \tag{5-4-24}$$

を変数とする 0 次の第 1 種および第 2 種のベッセル関数（巻末付録 A-1 参照）の 1 次結合

$$y(x)=C_1J_0(z)+C_2Y_0(z) \tag{5-4-25}$$

である．

微分方程式 (5-4-21) 中のパラメータ μ の値を任意に定めた上で，一般解 (5-4-25) に斉次の境界条件 $y(0)=y(1)=0$ を課し固有値を決定することは数値計算上の困難を伴

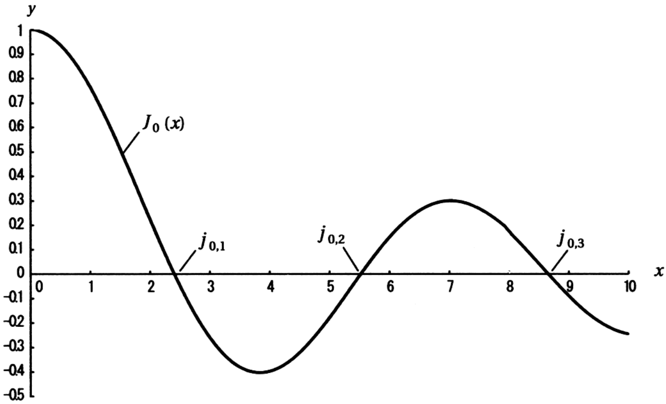


図 5-3　0 次の第 1 種ベッセル関数 $J_0(x)$ とその零点 $j_{0,1}, j_{0,2}, j_{0,3}$

表 5-2　0 次の第 1 種ベッセル関数 $J_0(z)$ の零点 $j_{0,s}(s=1,2,\ldots)$

s	1	2	3	4	5
$j_{0,s}$	2.40483	5.52008	8.65373	11.79153	14.93092

うが，もし一般解 (5-4-25) に現れる積分定数 $C_2=0$ となるようなパラメータ μ の値を選択するならば，容易に固有値を得ることができる．

そこで，0 次の第 1 種ベッセル関数 $J_0(z)$ の零点 $j_{0,s}$（図 5-3，表 5-2）が $x=0$ および $x=1$ に対応するようにパラメータ μ の値を選ぶことにする（ケース 1,2）．

ケース 1）$m=0$.　$x=0$ が $j_{0,1}$ に，$x=1$ が $j_{0,2}$ に対応する場合：$\mu=1.6618, \lambda_0=3.9927$

ケース 2）$m=1$.　$x=0$ が $j_{0,1}$ に，$x=1$ が $j_{0,3}$ に対応する場合：$\mu=2.5610, \lambda_1=9.4828$

そのとき，微分方程式 (5-4-21) の解すなわち固有関数 $y(x)$ は，一般解 (5-4-25) で $C_2=0$ とおいたものになるから，

$$y(x)=C_1 J_0(z) \tag{5-4-26}$$

となり，式 (5-4-8) により規格化すると，係数

$$C_1^2=\frac{1}{\displaystyle\int_0^1 e^{\mu x}J_0^2(z)dx}=\frac{2\lambda/\mu}{\displaystyle\int_{z(0)}^{z(1)} zJ_0^2(z)dz}$$

$$=\frac{4\lambda/\mu}{z(1)^2\left\{J_0^2\left(z(1)\right)+J_1^2\left(z(1)\right)\right\}-z(0)^2\left\{J_0^2\left(z(0)\right)+J_1^2\left(z(0)\right)\right\}}$$

$$=\frac{4\lambda/\mu}{z(1)^2 J_1^2\left(z(1)\right)-z(0)^2 J_1^2\left(z(0)\right)} \tag{5-4-27}$$

が定まる（巻末付録式 (A1-15) 参照）．

ケース1，2において，WKB近似解による固有値と固有関数をそれぞれ厳密解によるものと比較する（表5-3，図5-4,5-5）．

表5-3　WKB近似解と厳密解による固有値

ケース	m	WKB近似解	厳密解	誤差
1)	0	$\lambda_0 = 4.0607$	$\lambda_0 = 3.9927$	1.7%
2)	1	$\lambda_1 = 9.5871$	$\lambda_1 = 9.4828$	1.1%

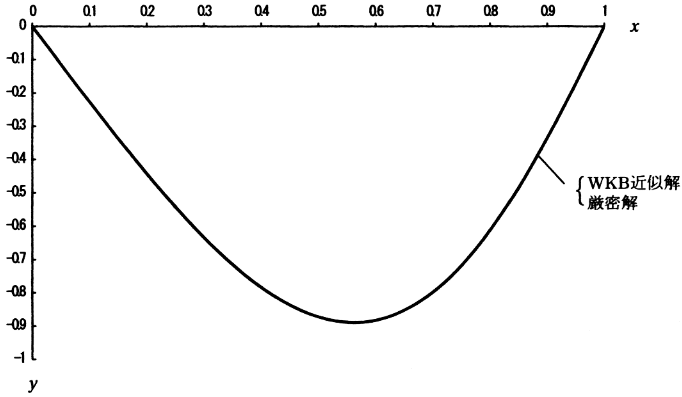


図5-4　例題5-5（ケース1：$m=0$）の固有関数

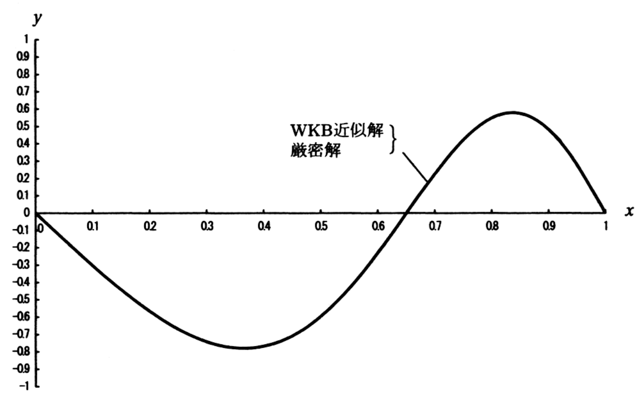


図5-5　例題5-5（ケース2：$m=1$）の固有関数

WKB近似解と厳密解による固有関数の乖離は，図の実線の幅に隠れるほど小さい（図5-4,5-5）．また，WKB近似解と厳密解による固有値の誤差（表5-3）も極めて小さい．■

結局，これら三つの例題すべてに関して，$m \to +\infty$ の極限において成立することが期待されたWKB近似解による固有値，固有関数が，$m = 0, 1$ というごく小さい整数についても厳密解とよく一致しているという驚くべき成果が確かめられる．

5-5　線形境界層問題

WKB法では $\varepsilon \to 0+$ の極限で解 $y(x)$ が破綻をきたす区間の中においてゆっくり変動する関数 $Q(x)$ を導入し，その指数関数型の解

$$y(x) \sim \exp\bigl(Q(x)/\delta\bigr) \qquad \delta \to 0+ \tag{5-2-6 再掲}$$

を仮定する．

したがって，5-2節でみたように，$Q(x)$ が複素数ならば式(5-2-3)のように $O(\delta)$ の波長で振動する関数を表現することができる一方，$Q(x)$ が実数ならば $O(\delta)$ の厚さの境界層を表現することもできる．

それゆえ，第4章の境界層理論により近似解を求めることができた問題のうち線形境界層問題は，WKB法によっても近似解を得ることができる．この意味で，線形問題に関する限り境界層問題はWKB法問題の応用例の一つとみなすことができる．

これを示すために，すでに4-2節において境界層理論による近似解を求めた2階斉次線形微分方程式

$$\varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad p(x) > 0, \quad y(0) = C, \quad y(1) = D \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{4-2-1 再掲}$$

を再びとりあげ，そのWKB法による近似解を求める．式(4-2-1)に式(5-2-8)を代入し，$\delta \to 0+$ の極限で消える項を無視すると

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2}Q_0'^2(x) + 2\frac{\varepsilon}{\delta}Q_0'(x)Q_1'(x) + \frac{\varepsilon}{\delta}Q_0''(x) + \frac{1}{\delta}Q_0'(x)p(x) + Q_1'p(x) + q(x) = 0 \tag{5-5-1}$$

を得る．式(5-5-1)の最初の4項を比べると，第2，3項は明らかに第1，4項よりも小さい．したがって，式(5-5-1)中で最も大きい第1，4項は卓越平衡にあり，同じオーダーでなければならない．すなわち，

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} = O(1/\delta) \tag{5-5-2}$$

つまり，ε と δ は比例するので，

$$\delta = \varepsilon \tag{5-5-3}$$

とおくことができる．これを用いて，式(5-5-1)の各項のうち ε^{-1} と ε^0 のオーダーの項

をまとめると，それぞれ

$$Q_0'^2 + Q_0' p(x) = 0 \tag{5-5-4a}$$

$$2Q_0' Q_1' + Q_0'' + Q_1' p(x) + q(x) = 0 \tag{5-5-4b}$$

を得る．式 (5-5-4a) を満たす解は，

$$Q_0' = 0 \tag{5-5-5a}$$

および，

$$Q_0' = -p(x) \tag{5-5-5b}$$

である．

まず，$Q_0' = 0$ (5-5-5a) の場合には式 (5-5-4b) は，

$$Q_1' p(x) + q(x) = 0$$

となるので，

$$Q_1 = -\int^x \frac{q(t)}{p(t)} dt \tag{5-5-6}$$

が定まり，微分方程式 (4-2-1) の WKB 近似による一方の解，

$$y_1(x) \sim C_1 \exp\left[\int_x^1 \frac{q(t)}{p(t)} dt\right] \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-5-7}$$

を得る．ここに，C_1 は $\exp(Q_0/\varepsilon)$ の項を含む定数である．

解 (5-5-7) は境界層理論で現れた**外域解**に相当する．

一方，$Q_0' = -p(x)$ (5-5-5b) の場合には式 (5-5-4b) は

$$-Q_1' p(x) - p'(x) + q(x) = 0 \tag{5-5-8}$$

となるので，

$$Q_1 = -\log p(x) + \int^x \frac{q(t)}{p(t)} dt \tag{5-5-9}$$

が定まり，$Q_0 = -\int^x p(t)dt$ を加えて微分方程式 (4-2-1) の WKB 近似によるもう一方の解

$$y_2(x) \sim C_2 \frac{1}{p(x)} \exp\left[\int_0^x \frac{q(t)}{p(t)} dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x p(t) dt\right] \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-5-10}$$

を得る．ここに，C_2 は積分定数であり，式 (5-5-10) は境界層理論で現れた**境界層内の解**に相当する．

そして，$y_1(x)$ と $y_2(x)$ の和

$$y(x) \sim C_1 \exp\left[\int_x^1 \frac{q(t)}{p(t)} dt\right] + C_2 \frac{1}{p(x)} \exp\left[\int_0^x \frac{q(t)}{p(t)} dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x p(t) dt\right] \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-5-11}$$

が，微分方程式 (4-2-1) の WKB 近似による一般解である．そこで，この一般解に境界条件 $y(0)=C, y(1)=D$ を課すと，

$$C = C_1 \exp\left[\int_0^1 \frac{q(t)}{p(t)}dt\right] + \frac{C_2}{p_0} \tag{5-5-11a}$$

$$D = C_1 \tag{5-5-11b}$$

を得る．ここに，$p_0 = p(0)$ であり，式 (5-5-11b) を導く際に，指数関数的に小さな量

$$\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 p(t)dt\right]$$

を無視した．

式 (5-5-11a,b) により C_1 と C_2 が定まるので，微分方程式 (4-2-1) の WKB 近似による解

$$y(x) \sim D\exp\left[\int_x^1 \frac{q(t)}{p(t)}dt\right] + \frac{p_0}{p(x)}\left(C - D\exp\left[\int_0^1 \frac{q(t)}{p(t)}dt\right]\right) \cdot\exp\left[\int_0^x \frac{q(t)}{p(t)}dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x p(t)dt\right] \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-5-12}$$

を得る．ここで，式 (5-5-12) の第 2 項は $x = O(\varepsilon)(\varepsilon \to 0+)$ においてのみ値をもつことに注意するとさらに単純化でき，

$$y(x) \sim D\exp\left[\int_x^1 \frac{q(t)}{p(t)}dt\right] + \left(C - D\exp\left[\int_0^1 \frac{q(t)}{p(t)}dt\right]\right)\exp(-p_0 x/\varepsilon) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-5-13}$$

を得る．解 (5-5-13) は境界層理論による区間 $0 \le x \le 1$ 全体で成立する統一解 $y_u(x)$(4-2-16) と完全に一致している．

なお，WKB 近似解 (5-5-13) を得る際には漸近接続を行う必要がなかったことに注意されたい．

5-6　転回点問題　トンネル効果

シュレディンガー型方程式

$$\varepsilon^2 y''(x) = A(x)y(x), \quad A(x) \ne 0 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-2-1 再掲}$$

の WKB 近似解

$$y(x) \sim \exp\left[\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k Q_k(x)\right] \qquad \delta = \varepsilon \to 0+ \tag{5-2-8 再掲}$$

の主要部は

$$Q_0(x) = \pm\int^x \sqrt{A(t)}dt \tag{5-3-5 再掲}$$

および

$$Q_1(x) = -\frac{1}{4}\log A(x) + C \qquad (C：積分定数) \tag{5-3-6 再掲}$$

であった．

この解を得るに際して $A(x) \neq 0$ の条件を課したが，その理由は，もし $A(x_0) = 0$ となる点 x_0 があるとその点近傍で WKB 近似の成立条件

$$Q_0 \gg \delta Q_1 \qquad \delta \to 0+ \tag{5-2-9 再掲}$$

を満足しないからである．

しかし実はさらに詳細な取り扱いをすることにより，定義域内で $A(x_0) = 0$ となる点 x_0 が存在する場合にも WKB 近似解を得ることができる．

本節では，定義域内で $A(x_0) = 0$ となる点 x_0 が存在する場合すなわち**転回点**（turning point）**問題**を考察する．これは境界層理論で考察した**内部境界層**と類似した問題である．

先にも述べたように，転回点という名称は**古典力学**に由来する．

いま，ここで考察する微分方程式の一例である 1 次元シュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = \bigl(E - V(x)\bigr)\phi(x) \tag{5-1-1b 再掲}$$

のもつ意味を考えてみると，$\phi(x)$ は質量 m の素粒子の波動関数，$V(x)$ はポテンシャル，E は全エネルギーであり，$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ は古典力学で $mv^2/2$ に対応する運動エネルギーである．古典力学では運動エネルギーは負の値をとれないので，粒子はポテンシャル $V(x)$ が全エネルギー E に一致する地点，例えば斜面上のある高さまでしか到達できず，そこから向きを転換して逆もどりする．つまり，

$$A(x) = -\bigl(E - V(x)\bigr) = 0 \tag{5-6-1}$$

となる点 x は粒子が向きを**転回**する点である．

しかし，粒子が波動としての性質をみせる**量子力学**の世界では，粒子のもつ全エネルギー E よりも高いポテンシャル $V(x)$ の地点まで，粒子は波動として振幅を減衰しつつも**浸み込ん**でゆくことができる．さらに，もしこのポテンシャル障壁が十分薄いものであれば，粒子はほとんど減衰することなくその反対側に顔を出すことができる．これが半導体などに応用されている**トンネル効果**である．

本節では，問題の本質を明らかにするために $A(x_0) = 0$ となる転回点 x_0 が一つだけ存在する場合を考え，座標を平行移動して転回点を $x_0 = 0$ とする．さらに，

$$A(x) \sim ax, \quad a > 0 \qquad x \to 0 \tag{5-6-2}$$

すなわち，$x < 0$ で $A(x) < 0$，$x > 0$ で $A(x) > 0$ とする（図 5-6）．したがって，本問題

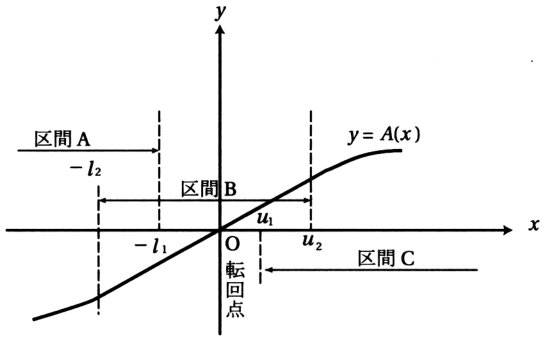


図 5-6　転回点問題の三つの区間

の解は，量子的粒子が古典的粒子の存在可能な領域 $x<0$ から転回点 $x=0$ を越えて古典的粒子の侵入不可能な領域 $x>0$ へ浸み込んでゆく様子を記述する．

さて，解を求めるにあたり，変数 x の定義域である実数区間全体 $(-\infty,\infty)$ を次のような 3 区間に分割する．

A）$(-\infty,-l_1]$　　B）$[-l_2,u_2]$　　C）$[u_1,\infty)$

このうち，区間 A では $A(x)<0$，区間 C では $A(x)>0$ であるから，それぞれ従来の WKB 法が有効である．

区間 B では従来の WKB 法は有効でないため別の方法で解を求め，これら 3 区間の解を漸近接続することにより全区間 $(-\infty,\infty)$ にわたる解を求める．

この手法が功を奏するためには，

$$-l_2<-l_1, \quad u_1<u_2 \tag{5-6-3}$$

であること，すなわち，区間 A と B，区間 B と C がそれぞれ重複する共有部分をもつことが期待されるが，実際それが可能であることが以下で明らかになる．

［区間 A, C］

区間 A における解は式 (5-3-7) で与えられるが，これに $A(x)<0$ であることを反映させ，二つの高振動数 $\left(O(1/\varepsilon)\right)$ をもつ振動解の和に変形する．

$$\begin{aligned} y_A(x) \sim\, & C_1\,[-A(x)]^{-1/4}\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_x^0 \sqrt{-A(t)}\,dt\right) \\ & + C_2\,[-A(x)]^{-1/4}\exp\left(-\frac{i}{\varepsilon}\int_x^0 \sqrt{-A(t)}\,dt\right) \qquad \varepsilon\to 0+ \end{aligned} \tag{5-6-4}$$

同様に，区間 C における解は $A(x)>0$ であるので，境界条件

$$y_C(x)\to 0 \qquad x\to +\infty \tag{5-6-5}$$

を課し，正の無限大で発散する成分を除くと，$O(1/\varepsilon)$ の減衰率で指数関数的に急激に減衰する解

$$y_C(x) \sim DA(x)^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \sqrt{A(t)}\,dt\right) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-6}$$

を得る．

[区間 B]

区間 B では

$$A(x) \sim ax, \quad a > 0 \qquad x \to 0 \tag{5-6-7}$$

であるので，もとの微分方程式 (5-2-1) は漸近関係式

$$\varepsilon^2 y_B''(x) \sim axy_B(x) \qquad \varepsilon \to 0+, \quad x \to 0 \tag{5-6-8}$$

となる．以下，漸近関係式 (5-6-8) を等号に置き換えた微分方程式

$$\varepsilon^2 y_B''(x) = axy_B(x) \tag{5-6-8a}$$

の解を求める．そこで，変数 x を

$$t = \varepsilon^{-2/3} a^{1/3} x \tag{5-6-9}$$

に変換すると，微分方程式 (5-6-8a) はエィリー（Airy）の微分方程式（巻末付録 式 (A5-1)）

$$\frac{d^2 z_B(t)}{dt^2} = tz_B(t) \tag{5-6-10}$$

に変換される．ここに，

$$z_B(t) \equiv y_B(x) \tag{5-6-11}$$

である．

微分方程式 (5-6-10) の一般解は二つのエィリー関数 (A5-2) の線形結合である．

$$z_B(t) = EAi(t) + FBi(t) \tag{5-6-12}$$

変数を x にもどすと，

$$y_B(x) \equiv z_B(t) = EAi\left(\varepsilon^{-2/3} a^{1/3} x\right) + FBi\left(\varepsilon^{-2/3} a^{1/3} x\right) \tag{5-6-13}$$

を得る．E, F は積分定数である．

■ [漸近接続]

さて，区間 A, C では $A(x) \neq 0$ であるゆえ WKB 法が有効なのであるが，$x \to \pm 0$ で $A(x) \to \pm 0$ であることに鑑み，区間 A $(-\infty, -l_1]$ の上限 $-l_1$ および区間 C$[u_1, \infty)$ の下限 u_1 が原点 $x = 0$，すなわち転回点にどれだけ近づき得るのかを吟味しておく必要がある．そこで，$x \to \pm 0$ の極限における次の諸量を評価する．

$$Q_0(x) = \pm\int^x \sqrt{A(t)}dt \qquad \text{(5-3-5 再掲)}$$

$$Q_1(x) = -\frac{1}{4}\log A(x) + C' \qquad \text{(5-3-6 再掲)}$$

$$Q_2(x) = \pm\int^x \left[\frac{A''(t)}{8A(t)^{3/2}} - \frac{5(A'(t))^2}{32A(t)^{5/2}}\right]dt \qquad \text{(演習問題 5-2)} \qquad \text{(5-6-14)}$$

これらは，$x=0$ の近傍で $A(x)\sim ax$ であることを用いると，それぞれ

$$Q_0(x) \sim C \pm \frac{2}{3}a^{1/2}x^{3/2} \quad (C：定数) \qquad x\to\pm 0 \qquad \text{(5-6-15)}$$

$$Q_1(x) \sim -\frac{1}{4}\log|x| \qquad x\to\pm 0 \qquad \text{(5-6-16)}$$

$$Q_2(x) \sim \pm\frac{5}{48}a^{-1/2}x^{-3/2} \qquad x\to\pm 0 \qquad \text{(5-6-17)}$$

となる．さて，WKB 法が有効であるためには，

$$Q_0 \gg \varepsilon Q_1 \gg \varepsilon^2 Q_2, \quad \varepsilon Q_2(x) \ll 1 \qquad \varepsilon\to 0+ \qquad \text{(5-6-18)}$$

でなければならない．そのためには，

$$|x| \gg \varepsilon^{2/3} \qquad \varepsilon\to 0+ \qquad \text{(5-6-19)}$$

でなければならないので，

$$-l_1 \ll -\varepsilon^{2/3}, \quad u_1 \gg \varepsilon^{2/3} \qquad \text{(5-6-20)}$$

である必要がある．

次に区間 B $[-l_2, u_2]$ の上下限について考察する．

ここでは $A(x)$ を

$$A(x) \sim ax, \quad a>0 \qquad x\to 0 \qquad \text{(5-6-21)}$$

と近似するのであるから，ベキ級数展開の 2 次の項を無視することができるためには，

$$|x| \ll 1 \qquad \text{(5-6-22)}$$

でなければならないので，

$$-l_2 \gg -1, \quad u_2 \ll 1 \qquad \text{(5-6-23)}$$

である必要がある．

したがって，たとえば区間の上下限を次のようにとれば，

$$-l_2 = -\varepsilon^{1/2}, \quad -l_1 = -\varepsilon^{3/5}, \quad u_1 = \varepsilon^{3/5}, \quad u_2 = \varepsilon^{1/2} \qquad \text{(5-6-24)}$$

区間 A と B，区間 B と C のそれぞれを重複させることができる．

$$-1 \ll -l_2 \ll -l_1 \ll -\varepsilon^{2/3}, \quad \varepsilon^{2/3} \ll u_1 \ll u_2 \ll 1 \qquad \text{(5-6-25)}$$

これにもとづき，それぞれの重複区間で漸近接続を行う．

1) 区間 B と C $[u_1, u_2]$

まず，区間 B と C の漸近接続を行う．この区間では，

$$t = \varepsilon^{-2/3} a^{1/3} x \to +\infty \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-26}$$

であるから，エイリー関数 $Ai(t), Bi(t)$ の $t \to +\infty$ における漸近級数展開 (A5-3) の主要部

$$Ai(t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} t^{3/2}\right) \qquad t \to +\infty \tag{5-6-27a}$$

$$Bi(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right) \qquad t \to +\infty \tag{5-6-27b}$$

を用いることができる．それゆえ，$y_B(x)$ (5-6-13) は

$$\begin{aligned} y_B(x) &\equiv z_B(t) \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{1/6} a^{-1/12} x^{-1/4} \left[\frac{1}{2} E \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{a^{1/2} x^{3/2}}{\varepsilon}\right) + F \exp\left(\frac{2}{3} \frac{a^{1/2} x^{3/2}}{\varepsilon}\right)\right] \qquad t \to +\infty \end{aligned} \tag{5-6-28}$$

となる．

一方，この区間では $x \ll 1$ であるから，再び $A(x) \sim ax$ であることを用いて，

$$Q_0(x) = \int_0^x \sqrt{A(t)}\, dt \sim \frac{2}{3} a^{1/2} x^{3/2} \qquad x \to 0+ \tag{5-6-29}$$

を得る．ただし，式 (5-6-15) 中の定数 C は式 (5-6-6) 中の定数 D に吸収させた．さらに

$$A(x)^{-1/4} \sim (ax)^{-1/4} \qquad x \to 0+ \tag{5-6-30}$$

となるので，$y_C(x)$ (5-6-6) は

$$\begin{aligned} y_C(x) &\sim D A(x)^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \sqrt{A(t)}\, dt\right) \\ &\sim D (ax)^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3\varepsilon} a^{1/2} x^{3/2}\right) \qquad x \to 0+ \end{aligned} \tag{5-6-31}$$

となる．もう少し精密な議論をすると $A(x) \sim ax$ と近似できるためには，$x \sim \varepsilon^{2/5}$ であることが必要であることがわかるが，結論に影響を与えないのでここでは詳しく述べない．

さて，区間 B と C が重なり合う区間 $[u_1, u_2]$ では，同じ微分方程式 (5-2-1) の解である $y_B(x)$ と $y_C(x)$ は完全に一致しなくてはならないが，式 (5-6-28) と (5-6-31) は確かに変数 x の同一の関数形をもっており漸近接続が可能である．それゆえ，両者が関数として完全に一致するという境界条件を課することにより両式に残る積分定数を決定することができる．

$$D = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \varepsilon^{1/6} a^{1/6} E \tag{5-6-32}$$

$$F=0 \tag{5-6-33}$$

その結果，式 (5-6-13,6) よりそれぞれ

$$y_B(x) \sim EAi\left(\varepsilon^{-2/3}a^{1/3}x\right) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-34}$$

$$y_C(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\varepsilon^{1/6}a^{1/6}EA(x)^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \sqrt{A(t)}dt\right) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-35}$$

を得る．

2)　区間 A と B，$[-l_2, -l_1]$

続いて，上の結果を用いて区間 A と B の漸近接続を行う．この区間では，

$$t=\varepsilon^{-2/3}a^{1/3}x \to -\infty \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-36}$$

であるから，エィリー関数 $Ai(t)$ の $t \to -\infty$ における漸近級数展開 (A5-3) の主要部

$$Ai(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-t)^{-1/4}\sin\left(\frac{2}{3}(-t)^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right) \qquad t \to -\infty \tag{5-6-37}$$

を用いることができる．それゆえ，$y_B(x)$ は

$$y_B(x) = EAi\left(\varepsilon^{-2/3}a^{1/3}x\right)$$

$$\sim \frac{E}{\sqrt{\pi}}a^{-1/12}\varepsilon^{1/6}(-x)^{-1/4}\sin\left(\frac{2}{3\varepsilon}a^{1/2}(-x)^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-38}$$

となる．一方，$y_A(x)$ は

$$y_A(x) \sim C_1[-A(x)]^{-1/4}\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_x^0 \sqrt{-A(t)}dt\right)$$

$$+C_2[-A(x)]^{-1/4}\exp\left(-\frac{i}{\varepsilon}\int_x^0 \sqrt{-A(t)}dt\right) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-4 再掲}$$

であるが，この式は $A(t)<0$ に注意して，(シュトゥルム-リゥヴィル問題で行ったのと同様に) 積分定数を選びなおすことにより，

$$y_A(x) \sim C_1|A(x)|^{-1/4}\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_x^0 \sqrt{|A(t)|}dt\right)$$

$$+C_2|A(x)|^{-1/4}\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_x^0 \sqrt{|A(t)|}dt\right) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-39}$$

と実数関数で表現することができる．

この区間では $x \ll 1$ であるから，$A(x) \sim ax$ であることを用いると，

$$y_A(x) \sim C_1a^{-1/4}(-x)^{-1/4}\sin\left(\frac{2}{3\varepsilon}a^{1/2}(-x)^{3/2}\right)$$

$$+C_2a^{-1/4}(-x)^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3\varepsilon}a^{1/2}(-x)^{3/2}\right) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-40}$$

を得る．

区間 A と B の重なり合う区間 $[-l_2, -l_1]$ では，同じ微分方程式 (5-2-1) の解である $y_A(x)$ と $y_B(x)$ は完全に一致しなくてはならないが，式 (5-6-40) と (5-6-38) は確かに変数 x の同一の関数形をもっており漸近接続が可能である．それゆえ，両者が関数として完全に一致するという境界条件を課することにより両式に残る積分定数を決定することができる．

$$C_1 a^{-1/4} = C_2 a^{-1/4} = \frac{E}{\sqrt{2\pi}} a^{-1/12} \varepsilon^{1/6} \tag{5-6-41}$$

これにより微分方程式 (5-2-1) の解が全区間で決定された．改めて

$$C = \sqrt{2} C_1 \tag{5-6-42}$$

とおくと，各区間における解は式 (5-6-39,34,35) よりそれぞれ

$$y_A(x) \sim C|A(x)|^{-1/4} \sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_x^0 \sqrt{|A(t)|}dt + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-43}$$

$$y_B(x) \sim \sqrt{\pi} C(\varepsilon a)^{-1/6} Ai(\varepsilon^{-2/3} a^{1/3} x) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-44}$$

$$y_C(x) \sim \frac{1}{2} C A(x)^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \sqrt{A(t)}dt\right) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-45}$$

となる．

WKB 法の適用範囲外であるとみなされていた $A(x)$ が零点（$A(x_0) = 0$）をもつ問題においても，その区間 B を個別に取り扱いその解と $A(x) \neq 0$ の区間 A,C における WKB 法による解を**漸近接続**することにより近似解を求めることができた．

そしてさらに，区間 A,B,C においてそれぞれの近似解 (5-6-43,44,45) に一致する統一解

$$y_u(x) \sim \sqrt{\pi} C \left[\frac{3}{2\varepsilon}\int_0^x \sqrt{A(t)}dt\right]^{1/6} (A(x))^{-1/4} Ai\left[\left(\frac{3}{2\varepsilon}\int_0^x \sqrt{A(t)}dt\right)^{2/3}\right] \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-46}$$

が発見された（[31]）．式 (5-6-46) が区間 A,B,C それぞれにおいて近似解 (5-6-43,44,45) に一致することが確かめることができる（演習問題 5-4）．

[例題 5-6]　転回点問題・厳密解との比較

$x = 0$ を転回点とする微分方程式

$$\varepsilon^2 y'' = x(x^2+1)^2 y \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-47}$$

の統一解 (5-6-46) は，

$$y_u(x) \sim \sqrt{\pi} C \left(1 + \frac{3}{7}x^2\right)^{1/6} \frac{1}{\varepsilon^{1/6}(1+x^2)^{1/2}} Ai\left(x\left(1+\frac{3}{7}x^2\right)^{2/3} \varepsilon^{-2/3}\right) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-48}$$

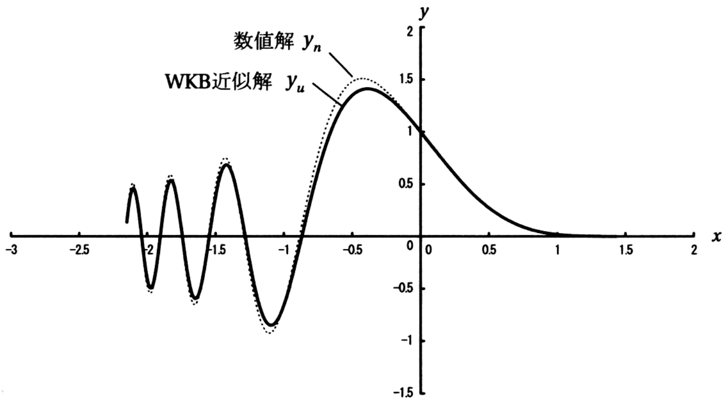


図 5-7　例題 5-6．転回点問題 ($\varepsilon = 0.3$)

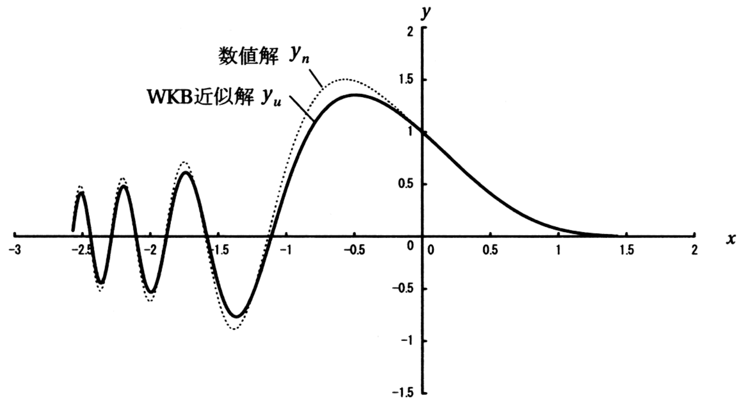


図 5-8　例題 5-6．転回点問題 ($\varepsilon = 0.5$)

である．これに転回点 $x = 0$ で $y = 1$ という境界条件を課すと係数 C が定まる．

$$C = \frac{\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{\pi} Ai(0)} = \frac{\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{\pi} \cdot 0.355058} \tag{5-6-49}$$

近似解 y_u(5-6-48)（実線）を数値解 y_n（点線）（$\Delta x = 0.01$ の差分方程式による）と比較する（図 5-7,5-8）．微小量であるべき ε の値が 0.3 および 0.5 と，1 に比べて十分小さいとはいえないにもかかわらず，両者はよく一致している．　■

5-7　非斉次線形微分方程式

本章でこれまで解説してきたWKB近似解を求める諸方法においては，一貫して指数関数型の解 $\exp(Q(x)/\delta)$ を仮定しその因子で微分方程式の両辺を割るという手続きをとった．それゆえあるいは,「WKB法は非斉次線形微分方程式には適用できないのではないか？」という懸念を懐いた読者があるだろう．章を閉じるにあたり，その懸念を払拭しておかねばならない．すなわち，WKB法は非斉次線形微分方程式をも対象に含むのである．

微分方程式の入門書に説明されているように（[8]［9]），非斉次線形微分方程式を解く代表的方法は，対応する斉次線形微分方程式の解をもとにした**定数変化法**である（巻末付録B-1,B-3参照）．もう一つの一般的方法は,その本質は定数変化法と異なるところはないのだが数学的により洗練された方法にみえる**グリーン関数**（Green's function）法である（[4]［29]）．

本節では，斉次微分方程式 (5-2-1) に対応する非斉次シュレディンガー型微分方程式

$$\varepsilon^2 y''(x) - A(x)y(x) = B(x), \quad A(x) > 0 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-7-1}$$

に関し，まず，斉次境界条件

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 0 \tag{5-7-2}$$

を満足する解のグリーン関数法によるWKB近似解を求める．

なお，対応する斉次微分方程式 (5-2-1) の物理光学近似解 (5-3-7) が一様に成立する条件

$$Q_1 \gg \delta Q_2 \qquad \delta \to 0+ \qquad \text{(5-2-9a 再掲)}$$

および解が精度よい近似解である条件

$$\delta Q_2(x) \ll 1 \qquad \delta \to 0+ \qquad \text{(5-2-10a 再掲)}$$

を満たすべく，

$$A(x) \gg x^{-2} \qquad x \to \pm\infty \tag{5-7-3}$$

を仮定する（演習問題5-5）．

さて，非斉次微分方程式 (5-7-1) に対応するグリーン関数方程式

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,x') - A(x)G(x,x') = \delta(x-x') \tag{5-7-4}$$

と境界条件

$$\lim_{x\to\pm\infty} G(x,x') = 0 \tag{5-7-5}$$

を満足するグリーン関数 $G(x,x')$ を決定することができるならば，非斉次シュレディンガー型微分方程式 (5-7-1) の解は $G(x,x')$ を用いて，

$$y(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,x')B(x')dx' \tag{5-7-6}$$

と表すことができる．ここに $\delta(x)$ は次式で定義される

$$\delta(x)=0,\quad x\neq 0 \tag{5-7-7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \tag{5-7-8}$$

ディラック（Dirac）のデルタ関数である．なお，デルタ関数 $\delta(x)$ は通常の意味での関数ではなく，$x=0$ を中心とする面積1の鋭いパルスの幅を無限小にした極限を表す超関数（distribution）である．

独立変数 x の変域を A）$x>x'$ と B）$x<x'$ の二つの区間に分割すると，それぞれの区間においてグリーン関数微分方程式 (5-7-4) は右辺が消え斉次シュレディンガー型微分方程式となるのでその WKB 近似解を直ちに求めることができる．

すなわち，斉次シュレディンガー型微分方程式の WKB 近似解（物理光学近似解）(5-3-7) に境界条件 (5-7-5) を適用すると，グリーン関数 $G(x,x')$ のそれぞれの区間における解は

$$\text{A)}\qquad G_A(x,x')\sim C_1A(x)^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_{x'}^{x}\sqrt{A(t)}dt\right)\qquad (x>x')\qquad \varepsilon\to 0+ \tag{5-7-9a}$$

$$\text{B)}\qquad G_B(x,x')\sim C_2A(x)^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_{x}^{x'}\sqrt{A(t)}dt\right)\qquad (x<x')\qquad \varepsilon\to 0+ \tag{5-7-9b}$$

となる．定数 C_1, C_2 は $x=x'$ における次の二つの境界条件により定まる．

まず，グリーン関数 $G(x,x')$ は二区間の境界 $x=x'$ において連続でなければならない．

$$\lim_{x\to x'+0}G_A(x,x')=\lim_{x\to x'-0}G_B(x,x') \tag{5-7-10}$$

なぜならば，$G(x,x')$ の2階微分の特異性がデルタ関数のオーダーであることを微分方程式 (5-7-4) が示しているからである．これから，

$$C_1=C_2 \tag{5-7-11}$$

を得る．また，境界 $x=x'$ を含む無限小の区間にわたり微分方程式 (5-7-4) を積分することにより第二の境界条件

$$\lim_{x\to x'+0}\frac{\partial}{\partial x}G_A(x,x')-\lim_{x\to x'-0}\frac{\partial}{\partial x}G_B(x,x')=\frac{1}{\varepsilon^2} \tag{5-7-12}$$

を得る．式 (5-3-11,12) から，

$$C_1 = C_2 = -\frac{1}{2\varepsilon A(x')^{1/4}} \tag{5-7-13}$$

が定まる．最終的に変数 x の実数全域にわたるグリーン関数 $G(x,x')$ の WKB 近似解（物理光学近似解）

$$G(x,x') \sim -\frac{1}{2\varepsilon}\left[A(x)A(x')\right]^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\left|\int_x^{x'}\sqrt{A(t)}\,dt\right|\right) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-7-14}$$

を得る．

上の例のように非斉次線形微分方程式 (5-7-1) に斉次境界条件 (5-7-2) を課した問題に対してグリーン関数を用いる解法はすっきりした単純な方法となる．非斉次境界条件の場合には，区間 A)，B) におけるグリーン関数 $G(x,x')$ の WKB 近似解それぞれに二つずつ積分定数が残る（式 (5-3-7)(5-7-9)）．これにグリーン関数の区間 A)，B) の境界に関する境界条件 (5-7-10,12) を課すと，最後に積分定数が二つ残る一般解を得る．

第 5 章の演習問題

5-1　シュレディンガー型微分方程式

$$\varepsilon^2 y''(x) = A(x)y(x), \quad A(x) \neq 0 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-2-1}$$

において，

$$A(x) = \frac{1}{(ax+b)^4} \qquad (a \neq 0)$$

であるとき，WKB 近似による漸近級数の主要部（物理光学近似）

$$y(x) \sim C_1 A(x)^{-1/4}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int^x \sqrt{A(t)}\,dt\right) + C_2 A(x)^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int^x \sqrt{A(t)}\,dt\right)$$
$$\varepsilon \to 0+ \tag{5-3-7}$$

は微分方程式 (5-2-1) の厳密解であることを示せ．WKB 近似による漸近級数展開を求める漸化式 (5-3-4c) からその理由を説明せよ．

5-2　漸化式 (5-3-4c) を解くことにより，より高次の項 $Q_2(x)$，$Q_3(x)$ を求めよ．

5-3　シュレディンガー型微分方程式

$$\varepsilon^2 y'' = (x+1)^2 y, \quad x \geq 0 \qquad \varepsilon \to 0+$$

の解を WKB 近似により，

$$y(x) \sim \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{2}\varepsilon^k Q_k(x)\right) \qquad \varepsilon \to 0+$$

の形で求めるとき，すべての $x \geq 0$ に対して解の相対誤差が 0.1 % 以下にするためには ε はどれほど小さくなければならないか．

5-4　統一解

$$y_u(x) \sim \sqrt{\pi} C \left[\frac{3}{2\varepsilon} \int_0^x \sqrt{A(t)} dt \right]^{1/6} (A(x))^{-1/4} Ai \left[\left(\frac{3}{2\varepsilon} \int_0^x \sqrt{A(t)} dt \right)^{2/3} \right] \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-6-46}$$

が $\varepsilon \to 0+$ の極限で区間 A,B,C それぞれにおいて近似解 (5-6-43, 44, 45) に一致することを示せ.

5-5　斉次微分方程式 (5-2-1) の物理光学近似解 (5-3-7) が一様に成立し，精度よい近似解であるためには

$$A(x) \gg x^{-2} \qquad x \to \pm\infty \tag{5-7-3}$$

が必要であることを証明せよ.

第6章

複スケール解析

第4，5章で解説した境界層理論およびWKB法は，最高階の係数が微小量の微分方程式すなわち構造的特異摂動問題の近似解を求める特異摂動法の手法である．

一方，独立変数の中に複数のスケールを導入する複スケール解析は，永年項が出現するタイプの特異摂動問題を解決するのみならず，構造的特異摂動問題をも通常の摂動法問題に置き換えて解くことのできる，特異摂動法のなかでも極めて汎用的な手法である．

まず6-1節で，第1章よりの懸案であった永年項問題の解決の道筋を示し，6-2節で複スケール解析という近似解法を確立する．次の2節で典型的な振動現象問題に複スケール解析を適用し，さらに続く2節で複スケール解析により境界層問題およびWKB法問題の近似解をも再現できることを示す．さらに本章の最後の例題として，4-6節で取り上げた宇宙工学の問題の境界層理論による近似解を複スケール解析により再現する．

6-1　永年項問題の解決

1-2節では，微分方程式の近似解を求めるべく通常の摂動法を適用しようとすると永年項の出現という形で摂動法が破綻をきたす例があること，さらに永年項が出現する原因をみてきた．

本節では，その永年項問題を解決するために摂動法の精神を踏襲しつつ近似解の展開の方法に工夫を加えることを考える．なお，説明の都合上，1-2節の内容を一部復習することにする．

再び，次の2階斉次線形常微分方程式を考える．本章でも独立変数を時間 t とする．

$$y'' + \omega^2 y = -2\varepsilon\omega y' \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{1-2-7 再掲}$$

その一般解（厳密解）は

$$y_e = A\exp\left[\left(-\varepsilon\omega + i\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)t\right] + B\exp\left[\left(-\varepsilon\omega - i\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)t\right] \tag{1-2-12a 再掲}$$

（A, B は積分定数）あるいは

$$y_e = A\exp(-\varepsilon\omega t)\cos\left(\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}\,t + \alpha\right) \tag{1-2-12b 再掲}$$

（A, α は積分定数）であった．

一方，微分方程式 (1-2-7) の微小量 ε に関するベキ級数展開による近似解

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots \tag{1-2-13 再掲}$$

を求め，その展開の第3項までをまとめると，

$$\begin{aligned} y &= A\exp(+i\omega t) + B\exp(-i\omega t) - \varepsilon\omega t\left[A\exp(+i\omega t) + B\exp(-i\omega t)\right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}(\varepsilon\omega t)^2 - \frac{1}{2}i\varepsilon^2\omega t\right]A\exp(+i\omega t) + \left[\frac{1}{2}(\varepsilon\omega t)^2 + \frac{1}{2}i\varepsilon^2\omega t\right]B\exp(-i\omega t) \end{aligned} \tag{1-2-24a 再掲}$$

あるいは

$$\begin{aligned} y &= A\cos(\omega t + \alpha) - \varepsilon\omega t A\cos(\omega t + \alpha) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\varepsilon\omega t)^2 A\cos(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega t A\sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \tag{1-2-24b 再掲}$$

を得た．

すなわち，式 (1-2-24a,b) の ε に関して1次の項は $\varepsilon\omega t$ に比例し，また2次の項は $(\varepsilon\omega t)^2$ および $\varepsilon^2\omega t$ に比例している．それゆえ，$\varepsilon\omega t$ および $(\varepsilon\omega t)^2$ の項は時間 t が $O\left(1/(\varepsilon\omega)\right)$ に到達すると，非摂動項と同じオーダーに成長し，その後も時間 t に比例して成長し非摂動項を追い抜いてゆく．同様に，$\varepsilon^2\omega t$ の項は時間 t が $O\left(1/(\varepsilon^2\omega)\right)$ に到達すると，非摂動項と同じオーダーに成長してしまう．このように時間 t とともに限りなく成長し続ける項を**永年項**と呼ぶ．

一方，微分方程式 (1-2-7) の厳密解 (1-2-12a,b) は，時間とともに振幅が減衰する調和振動子である．したがって，摂動展開のこれら1次，2次の（そしてすべての）項は，厳密解の基本的性質と矛盾するものになっている．これが**永年項問題**である．

さて，式 (1-2-24a,b) は，

$$\begin{aligned} y &= A\left(1 - \varepsilon\omega t + \frac{1}{2}(\varepsilon\omega t)^2 - \frac{1}{2}i\varepsilon^2\omega t\right)\exp(+i\omega t) \\ &\quad + B\left(1 - \varepsilon\omega t + \frac{1}{2}(\varepsilon\omega t)^2 + \frac{1}{2}i\varepsilon^2\omega t\right)\exp(-i\omega t) \end{aligned} \tag{1-2-25a 再掲}$$

あるいは

$$y = A\left(1-\varepsilon\omega t+\frac{1}{2}(\varepsilon\omega t)^2\right)\cos(\omega t+\alpha)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\omega t A\sin(\omega t+\alpha) \qquad \text{(1-2-25b 再掲)}$$

とまとめ直すことができる．これらを厳密解 (1-2-12a,b) と比較すると，式 (1-2-13) による摂動展開の解は，厳密解中の指数関数 $\exp(-\varepsilon\omega t)$ と余弦関数 $\cos\left(\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}t\right)$ を ε に関してベキ級数展開しており，そのために $\varepsilon\omega t$，$(\varepsilon\omega t)^2$ あるいは $\varepsilon^2\omega t$ に比例する永年項が現れたことがわかる．

1-2 節ではここまで到達していた．

さて，厳密解 (1-2-12a,b) を観察すると，摂動 ε の効果は振幅の減衰 $A\exp(-\varepsilon\omega t)$ と同時に振動数のズレ $\cos\left(\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}t\right)$ にも現れている．そこで，解 y を ε でベキ級数展開すると同時に，振動数 ω も ε で級数展開することに想到する．

$$\omega = \omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots \qquad \text{(6-1-1)}$$

式 (1-2-13) と (6-1-1) を式 (1-2-7) に代入すると，

$$\begin{aligned}&\left(y_0''+\varepsilon y_1''+\varepsilon^2 y_2''+\cdots\right)+\left(\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots\right)^2\left(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots\right)\\&=-2\varepsilon\left(\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots\right)\left(y_0'+\varepsilon y_1'+\varepsilon^2 y_2'+\cdots\right)\end{aligned} \qquad \text{(6-1-2)}$$

を得る．式中の ε に関する次数の等しい項をまとめると，

$$y_0''+\omega_0^2 y_0 = 0 \qquad \text{(6-1-3)}$$

$$y_1''+\omega_0^2 y_1 = -2\omega_0\left(y_0'+\omega_1 y_0\right) \qquad \text{(6-1-4)}$$

$$y_2''+\omega_0^2 y_2 = -2\left(\omega_0 y_1'+\omega_1 y_0'\right)-2\omega_0\omega_1 y_1-\left(2\omega_0\omega_2+\omega_1^2\right)y_0 \qquad \text{(6-1-5)}$$

…………

と続く漸化式を得る．

式 (6-1-3) の 0 次の一般解は，従来と同じく

$$y_0 = A\exp(+i\omega_0 t)+B\exp(-i\omega_0 t) \qquad (A, B\ \text{は積分定数}) \qquad \text{(6-1-6a)}$$

あるいは

$$y_0 = A\cos(\omega_0 t+\alpha) \qquad (A, B\ \text{は積分定数}) \qquad \text{(6-1-6b)}$$

である．

これを式 (6-1-4) に代入すると，

$$y_1''+\omega_0^2 y_1 = -2\omega_0\left[(\omega_1+i\omega_0)A\exp(+i\omega_0 t)+(\omega_1-i\omega_0)B\exp(-i\omega_0 t)\right] \qquad \text{(6-1-7a)}$$

あるいは

$$y_1''+\omega_0^2 y_1 = -2\omega_0 A\left[\omega_1\cos(\omega_0 t+\alpha)-\omega_0\sin(\omega_0 t+\alpha)\right] \qquad \text{(6-1-7b)}$$

を得る.

しかし，いかなる ω_1 の値を選ぶにせよ，式 (6-1-7a,b) の右辺に現れる斉次方程式の解の係数を 0 にすることはできず，これから求まる y_1 にはやはり永年項が現れてしまう．つまり，従属変数 y に加えて振動数 ω を ε で級数展開するだけでは永年項を取り除くことはできない.

そこで，再び式 (6-1-4) に遡ると，y_1 に永年項が現われることを抑えるべく式 (6-1-4) の右辺を 0 にするためには，y_0 が，

$$y_0' + \omega_1 y_0 = 0 \tag{6-1-8}$$

を満たすような時間依存性 (時間スケール) をもたなければならないことを示唆している．そこで，リンドシュテット (Lindstedt) は微小係数 ε で級数展開した振動数 ω を用いた新しい変数

$$\tau = \omega t = (\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots)t \tag{6-1-9}$$

を採用することにより，微分方程式 (1-2-7) および非線形振動現象を支配する微分方程式を摂動展開する際に現れる永年項の出現を抑えることに成功し ([33])，さらに，この方法は従属変数 y と同時に独立変数 t を微小定数 ε で級数展開する方法に一般化された ([34])．これら一連の手法は非線形振動現象を支配する微分方程式の摂動展開に現れる永年項の出現を抑えるという輝かしい成果を挙げたが，後にこれらの手法は第 4，5 章で取り扱った最高階の係数が微小量である微分方程式，すなわち構造的特異摂動問題についてはその近似解を求めることができない，という適用限界のあることが判明した.

これらの諸研究を踏まえて確立された手法・**複スケール解析**を次節以降で解説する．複スケール解析により永年項問題のみならず構造的特異摂動問題を含む幅広い特異摂動問題の統一近似解を得ることができる.

6-2　複数の時間 (長さ) スケールの導入

複スケール解析では，通常の時間スケールに加えてそれより長い時間スケール

$$t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t, \ \cdots \tag{6-2-1}$$

を導入し，変数 $t, t_1, t_2, \ldots$ をそれぞれ独立変数と考える．なお，独立変数が長さ x であれば長い距離スケールを導入することに対応するのはもちろんである.

このとき，本来の時間 t による微分は次式で与えられる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial t_1}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial t_2}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \to \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_1} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_2}\right) + \cdots \tag{6-2-2}$$

式 (1-2-13),(6-2-2) を式 (1-2-7) に代入すると次式を得る．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_1} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_2}\right) + \cdots\right)(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots)$$
$$+ \omega^2(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots)$$
$$= -2\varepsilon\omega\left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots\right)(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots) \tag{6-2-3}$$

式中の ε に関する次数の等しい項をまとめると，

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} + \omega^2 y_0 = 0 \tag{6-2-4}$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \omega^2 y_1 = -2\left(\frac{\partial^2 y_0}{\partial t\partial t_1} + \omega\frac{\partial y_0}{\partial t}\right) \tag{6-2-5}$$

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + \omega^2 y_2 = -2\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial t\partial t_1} + \omega\left(\frac{\partial y_0}{\partial t_1} + \frac{\partial y_1}{\partial t}\right)\right) - \left(\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t\partial t_2}\right) \tag{6-2-6}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

と続く漸化式を得る．

まず，0 次の微分方程式 (6-2-4) の一般解は，

$$y_0 = A(t_1, t_2, \ldots)\exp(+i\omega t) + B(t_1, t_2, \ldots)\exp(-i\omega t) \tag{6-2-7a}$$

あるいは

$$y_0 = A(t_1, t_2, \ldots)\cos(\omega t + \alpha(t_1, t_2, \ldots)) \tag{6-2-7b}$$

となり，振幅 $A(t_1, t_2, \ldots), B(t_1, t_2, \ldots)$ および位相 $\alpha(t_1, t_2, \ldots)$ は短い時間スケール t には依存しない長い時間スケール $t_1, t_2, \ldots$ のみの関数である．

これより先，非線形演算を行う場合には，式 (6-2-7b) のような実数表示よりも式 (6-2-7a) のような複素数表示の方が便利なので，例外を除きもっぱら複素数表示を用いる．

0 次の解 (6-2-7a) を 1 次の微分方程式 (6-2-5) に代入すると，

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \omega^2 y_1 = -2i\omega\left(\frac{\partial A}{\partial t_1} + \omega A\right)\exp(+i\omega t) + 2i\omega\left(\frac{\partial B}{\partial t_1} + \omega B\right)\exp(-i\omega t) \tag{6-2-8}$$

を得る．

さて，もとの微分方程式 (1-2-7) は定常的な調和振動子に摂動として減衰項が加わったものであるから，その解は有界でなければならない．したがって，解の有界性と矛盾

する**共鳴現象**が起こらないこと，すなわち**永年項**が現れないという条件を，近似解の1次の項 y_1 に課することができる．その条件を満たすためには，式(6-2-8)の $\exp(+i\omega t)$ および $\exp(-i\omega t)$ の係数が0でなければならない．この要請から，0次の解の振幅 $A(t_1,t_2,\ldots),B(t_1,t_2,\ldots)$ の時間スケール t_1 に関する微分方程式

$$\frac{\partial A}{\partial t_1}+\omega A=0 \tag{6-2-9}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t_1}+\omega B=0 \tag{6-2-10}$$

を得る．これから直ちに $A(t_1,t_2,\ldots),B(t_1,t_2,\ldots)$ の時間スケール t_1 依存性が明らかになる．

$$A=A_0(t_2,\ldots)\exp(-\omega t_1) \tag{6-2-11}$$

$$B=B_0(t_2,\ldots)\exp(-\omega t_1) \tag{6-2-12}$$

これらを代入すると，0次の解(6-2-7a)は

$$y_0=A_0(t_2,\ldots)\exp(-\omega t_1+i\omega t)+B_0(t_2,\ldots)\exp(-\omega t_1-i\omega t) \tag{6-2-13}$$

となる．また，右辺が0となった式(6-2-8)から，1次の解

$$y_1=C(t_1,t_2,\ldots)\exp(+i\omega t)+D(t_1,t_2,\ldots)\exp(-i\omega t) \tag{6-2-14}$$

を得る．ここに，振幅 $C(t_1,t_2,\ldots),D(t_1,t_2,\ldots)$ は短い時間スケール t には依存しない，長い時間スケール $t_1,t_2,\ldots$ のみの関数である．これらを2次の微分方程式(6-2-6)に代入すると，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}+\omega^2 y_2\\&=-2i\omega\left(\frac{\partial C}{\partial t_1}+\omega C\right)\exp(+i\omega t)+2i\omega\left(\frac{\partial D}{\partial t_1}+\omega D\right)\exp(-i\omega t)\\&\quad-2i\omega\left(\frac{\partial A_0}{\partial t_2}+\frac{1}{2}i\omega A_0\right)\exp(-\omega t_1+i\omega t)\\&\quad+2i\omega\left(\frac{\partial B_0}{\partial t_2}-\frac{1}{2}i\omega B_0\right)\exp(-\omega t_1-i\omega t)\end{aligned} \tag{6-2-15}$$

を得る．再び，解 y_2 に永年項が現れないことを要請すると，式(6-2-15)の $\exp(+i\omega t)$ および $\exp(-i\omega t)$ の係数は0でなければならない．この条件から，1次の解 y_1 の振幅 $C(t_1,t_2,\ldots),D(t_1,t_2,\ldots)$ の時間スケール t_1 に関する微分方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t_1}+\omega C=0 \tag{6-2-16}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t_1}+\omega D=0 \tag{6-2-17}$$

および，$A(t_1,t_2,\ldots),B(t_1,t_2,\ldots)$ それぞれの振幅 $A_0(t_2,\ldots),B_0(t_2,\ldots)$ の時間スケール t_2 に関する微分方程式

$$\frac{\partial A_0}{\partial t_2}+\frac{1}{2}i\omega A_0=0 \tag{6-2-18}$$

$$\frac{\partial B_0}{\partial t_2}-\frac{1}{2}i\omega B_0=0 \tag{6-2-19}$$

を得る．式 (6-2-16,17) から $C(t_1,t_2,\ldots),D(t_1,t_2,\ldots)$ の時間スケール t_1 依存性が明らかになる．

$$C=C_0(t_2,\ldots)\exp(-\omega t_1) \tag{6-2-20}$$

$$D=D_0(t_2,\ldots)\exp(-\omega t_1) \tag{6-2-21}$$

これらを式 (6-2-14) に代入し

$$y_1=C_0(t_2,\ldots)\exp(-\omega t_1+i\omega t)+D_0(t_2,\ldots)\exp(-\omega t_1-i\omega t) \tag{6-2-22}$$

を得るが，y_1 は y_0 と時間スケール t,t_1 の関数として同じ形をもち，なんら新しい自由度をもっていないことがわかる．

一方，式 (6-2-18,19) から直ちに $A_0(t_2,\ldots),B_0(t_2,\ldots)$ の時間スケール t_2 依存性が明らかになる．

$$A_0=A_1(t_3,\ldots)\exp\left(-\frac{1}{2}i\omega t_2\right) \tag{6-2-23}$$

$$B_0=B_1(t_3,\ldots)\exp\left(+\frac{1}{2}i\omega t_2\right) \tag{6-2-24}$$

これを式 (6-2-13) に代入すると

$$y_0=A_1(t_3,\ldots)\exp\left(-\frac{1}{2}i\omega t_2-\omega t_1+i\omega t\right)+B_1(t_3,\ldots)\exp\left(+\frac{1}{2}i\omega t_2-\omega t_1-i\omega t\right) \tag{6-2-25}$$

を得る．この式中の $t_1,t_2,\ldots$ を (6-2-1) を用いて本来の変数 t,ε にもどすと，

$$y_0=A_1(\varepsilon^3 t,\ldots)\exp\left[-\omega\varepsilon t+i\omega\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)t\right]+B_1(\varepsilon^3 t,\ldots)\exp\left[-\omega\varepsilon t-i\omega\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)t\right] \tag{6-2-26}$$

となり，これは厳密解

$$y=A\exp\left[\left(-\varepsilon\omega+i\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)t\right]+B\exp\left[\left(-\varepsilon\omega-i\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)t\right] \qquad \text{(1-2-12a 再掲)}$$

の減衰部分 $\exp(-\omega\varepsilon t)$ を正確に取り入れており，さらに，振動部分 $\exp\left(\pm i\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}t\right)$ の振動数の変化を $\exp\left(\pm i\omega(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2)t\right)$ という形で，ε^2 のオーダーまで正確に表現していることがわかる．

そして当然ながら，**永年項は出現しない**．すなわち，複数の時間スケールを導入することにより永年項問題は解決した．

ここで「永年項を除く」という要請（条件）と特異摂動展開（2-3-4節）との関連に触れておこう．複スケール解析は，特異摂動問題に対する一様に成立する漸近級数解，すなわち，

$$\left| f(x,\varepsilon) - \sum_{m=0}^{k} a_m(x)\varphi_m(\varepsilon) \right| \le K \left| \varphi_{k+1}(\varepsilon) \right| \qquad \varepsilon \to 0 \qquad \text{(2-3-47 再掲)}$$

を満たす，変数 x に依存しない正の数 $K(x) = K_0$ が存在するような漸近級数解を求める特異摂動法の一手法である．もし，式 (2-3-47) の左辺の級数内に永年項が出現すれば，上記の「一様に成立する漸近級数」条件が破れるので，これを除くことがとりもなおさず一様に成立する漸近級数解を得ることになるのである．

以下の節でその応用例を示すように，複スケール解析は，境界層問題・WKB法問題を含む，線形・非線形問題，また常微分方程式・偏微分方程式（第7章）の別なく幅広い特異摂動問題を解決する極めて有力な近似解法である．

6-3　ダフィン方程式

本節と次節で2種類の非線形摂動項をもつ調和振動子を考える．これらの微分方程式の通常の摂動法による近似解を求めようとすると永年項が現れるので（第1章演習問題1-3-1），複スケール解析を用いなければならない．

第一の例は，y^3 に比例する摂動項をもつダフィン方程式（Duffing's equation）

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon y^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \qquad \varepsilon \to 0+ \qquad \text{(6-3-1)}$$

である．

まず，ダフィン方程式 (6-3-1) が保存系であることを示しておこう．式 (6-3-1) の両辺に dy/dt を乗じると，

$$\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + y\frac{dy}{dt} + \varepsilon y^3 \frac{dy}{dt} = 0 \qquad \text{(6-3-2a)}$$

すなわち保存形微分方程式

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2 + \frac{\varepsilon}{2}y^4\right] = 0 \qquad \text{(6-3-2b)}$$

を得る．微分方程式 (6-3-2b) は，運動エネルギー $(dy/dt)^2/2$ とポテンシャルエネルギー $y^2/2 + \varepsilon y^4/4$ の和である力学的全エネルギー

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2 + \frac{\varepsilon}{2}y^4\right] \qquad \text{(6-3-3)}$$

が，時間の経過によって変化しない保存量であること

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+y^2+\frac{\varepsilon}{2}y^4\right]_{t=t}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+y^2+\frac{\varepsilon}{2}y^4\right]_{t=0} \tag{6-3-4}$$

を示しており，y および dy/dt は有界である．

さて，前節で確立した複スケール解析の一般的な手法に則り，ダフィン方程式の解 y を微小パラメータ ε で展開し

$$y=y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots \qquad \text{(1-2-13 再掲)}$$

同時に，通常の時間スケールに加えてそれより長い時間スケール

$$t,\quad t_1=\varepsilon t,\quad t_2=\varepsilon^2 t,\ \cdots \qquad \text{(6-2-1 再掲)}$$

を導入する．このとき，本来の時間 t による微分は (6-2-2) で与えられる．

式 (1-2-13)，(6-2-2) を式 (6-3-1) に代入すると，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_1}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}+2\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_2}\right)+\cdots\right)(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots)$$
$$+\left(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots\right)+\varepsilon\left(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots\right)^3=0 \tag{6-3-5}$$

を得る．式中の ε に関する次数の等しい項をまとめると，

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2}+y_0=0 \tag{6-3-6}$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}+y_1=-y_0^3-2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t\partial t_1} \tag{6-3-7}$$

…………

と続く漸化式を得る．この場合，式 (6-3-6) の一般解（実数の関数）を次のように共役複素数の関数の和の形に表しておくと以下の式の展開に好都合である．

$$y_0=A(t_1,\ldots)\exp(+it)+A(t_1,\ldots)^*\exp(-it) \tag{6-3-8}$$

ここに $A(t_1,\ldots)$ は短い時間スケール t には依存しない複素関数，$A(t_1,\ldots)^*$ はその複素共役である．式 (6-3-8) を (6-3-7) に代入すると，

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}+y_1=-A^3\exp(3it)-(A^*)^3\exp(-3it)$$
$$-\left(3A^2A^*+2i\frac{\partial A}{\partial t_1}\right)\exp(it)-\left(3A(A^*)^2-2i\frac{\partial A^*}{\partial t_1}\right)\exp(-it) \tag{6-3-9}$$

を得る．

すでに示したようにダフィン方程式の解は有界であるから，「(6-3-9) の解 y_1 に永年項が現れない」という条件を課すことができる．それには，式 (6-3-9) 右辺の $\exp(it)$ および $\exp(-it)$ の係数が 0 でなければならない．この条件から，$A(t_1,\ldots), A(t_1,\ldots)^*$ の時間スケール t_1 に関する微分方程式

$$2i\frac{\partial A}{\partial t_1}+3A^2A^*=0 \tag{6-3-10a}$$

$$2i\frac{\partial A^*}{\partial t_1}-3A(A^*)^2=0 \tag{6-3-10b}$$

を得る．なお，式 (6-3-10b) は (6-3-10a) の複素共役である．

式 (6-3-10a) に A^* を，式 (6-3-10b) に A をそれぞれ乗じた式を加えると

$$2i\frac{\partial AA^*}{\partial t_1}=0 \tag{6-3-11a}$$

を得る．すなわち，振幅 A の絶対値 $\sqrt{AA^*}$ は時間スケール t_1 に関して一定である．

$$\sqrt{AA^*}=R_0 \tag{6-3-11b}$$

これは，ダフィン方程式が保存系であることを裏づけている．そこで，

$$A(t_1,\ldots)=R_0\exp\left(i\theta(t_1,\ldots)\right) \tag{6-3-12}$$

とおき，式 (6-3-12) を (6-3-10a) に代入し，共通因子 $\exp\left(i\theta(t_1,\ldots)\right)$ を取り除くと，$A(t_1,\ldots)$ の位相 θ の微分方程式

$$\frac{\partial\theta}{\partial t_1}=\frac{3}{2}R_0^2 \tag{6-3-13}$$

を得る．式 (6-3-12),(6-3-13) から直ちに，

$$A(t_1,\ldots)=R_0\exp i\left(\theta_0+\frac{3}{2}R_0^2t_1\right) \tag{6-3-14}$$

を得る．したがって，近似解の主要部 y_0 は，

$$\begin{aligned}y_0&=R_0\exp i\left(\theta_0+t+\frac{3}{2}R_0^2t_1\right)+R_0\exp\left[-i\left(\theta_0+t+\frac{3}{2}R_0^2t_1\right)\right]\\&=2R_0\cos\left[\theta_0+\left(1+\frac{3}{2}R_0^2\varepsilon\right)t\right]\end{aligned} \tag{6-3-15}$$

である．この一般解に初期条件，$y(0)=1, y'(0)=0$ を課すと，

$$R_0=\frac{1}{2},\quad \theta_0=0 \tag{6-3-16}$$

となり，最終的にダフィン方程式 (6-3-1) の複スケール解析による近似解の主要部

$$y_0=\cos\left[\left(1+\frac{3}{8}\varepsilon\right)t\right] \tag{6-3-17}$$

を得る．

さて，ダフィン方程式 (6-3-1) には厳密解 $y=\mathrm{sn}(x,m)$ が存在する．$\mathrm{sn}(x,m)$ はヤコビの楕円関数 (Jacobian elliptic functions)（巻末付録 A-6 参照）の一つであり，その主値は

$$x=\pm\int_y^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(1+\varepsilon(1+u^2)/2\right)}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\int_0^{\arccos y}\frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}}$$

$$m = \varepsilon\big/(2+2\varepsilon) \tag{6-3-18}$$

である．また，$\mathrm{sn}(x,m)$ の周期は

$$T = \frac{4}{\sqrt{1+\varepsilon}}K(m) \tag{6-3-19}$$

である．ここに，

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}} \tag{6-3-20}$$

は第一種の完全楕円積分 (A6-3) である．

図 6-1 は，ダフィン方程式 $(\varepsilon = 0.1)$ の複スケール解析による近似解の主要部 (6-3-17) と厳密解 (6-3-18) を比較するものである．両者は $x < 60 = 6/\varepsilon$ の範囲でほぼ完全に一致している．

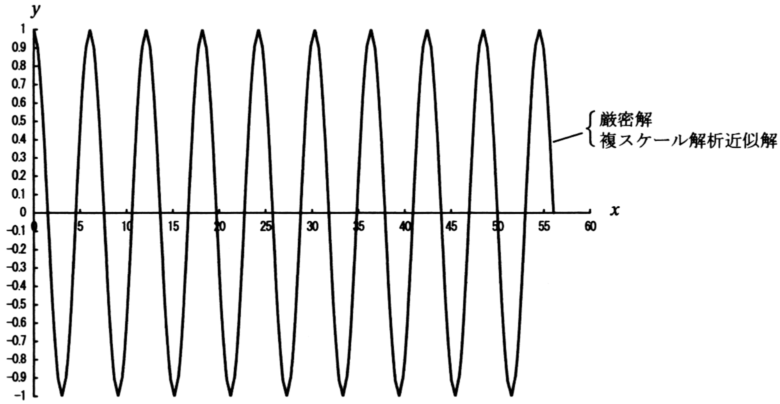


図 6-1　ダフィン方程式 ((6-3-1); $\varepsilon = 0.1$) の複スケール解析による近似解と厳密解．線の太さの中に重なっている．

さらに両者の周期を比較すると，

$$近似解の周期 = 2\pi\Big/\left(1+\frac{3}{8}\varepsilon\right) = 6.052$$

$$厳密解の周期 = \frac{4}{\sqrt{1+\varepsilon}}K(m) = \frac{4}{\sqrt{1+0.1}}1.589 = 6.060$$

とよく一致している．

6-4　ファン・デル・ポール方程式

第二の例はファン・デル・ポール方程式（Van der Pol's equation）

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y+\varepsilon\left(\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-1\right)\frac{dy}{dt}=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2v,\qquad \varepsilon\to 0+ \tag{6-4-1}$$

である[*1].

ファン・デル・ポール方程式は，線形散逸項を含む調和振動子の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=-2\varepsilon\omega\frac{dy}{dt}\qquad \varepsilon\to 0+ \tag{1-2-7 再掲}$$

において，$\omega=1$ としたものの散逸項の係数 2 を $\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-1$ で置き換えたものとみなすことができる．

したがって，ファン・デル・ポール方程式中の非線形項 $\varepsilon\left(\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-1\right)\frac{dy}{dt}$ は，速度の絶対値が大きいとき $\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-1>0$ には減衰項の役割を果たす一方，速度の絶対値が小さいとき $\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-1<0$ には増幅項の役割を果たす．このような非線形項 $\varepsilon\left(\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-1\right)\frac{dy}{dt}$ の性質を考慮すると，ファン・デル・ポール方程式の解はある「中程度」の大きさに安定して留まることが予想される．

実際，ファン・デル・ポール方程式の解は $t\to+\infty$ の極限で初期条件にかかわらず位相平面における**極限循環軌道**（limit cycle）に近づくことを示すことができる（次項）．

以上を念頭に，複スケール解析によりファン・デル・ポール方程式の近似解を求める．恒例に従い，解 y を微小パラメータ ε で展開する

$$y=y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2y_2+\cdots \tag{1-2-13 再掲}$$

と同時に，通常の時間スケールに加えて，それより長い時間スケール

$$t,\quad t_1=\varepsilon t,\quad t_2=\varepsilon^2t,\cdots \tag{6-2-1 再掲}$$

を導入する．このとき，本来の時間 t による微分は式 (6-2-2) で与えられる．

式 (1-2-13)，(6-2-2) を (6-4-1) に代入すると，

[*1] 狭義のファン・デル・ポール方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y+\varepsilon(y^2-1)\frac{dy}{dt}=0 \tag{6-4-1a}$$

であり，微分方程式 (6-4-1) をファン・デル・ポール方程式と呼ばない文献もある．しかし，微分方程式 (6-4-1) を 1 階微分して dy/dt を y と読み直すと，狭義のファン・デル・ポール方程式 (6-4-1a) に一致する．それゆえ，本書では微分方程式 (6-4-1) を広義のファン・デル・ポール方程式と呼ぶ．

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_1}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}+2\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_2}\right)+\cdots\right)(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots)
$$
$$
+(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots)
$$
$$
+\frac{\varepsilon}{3}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2}+\cdots\right)(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots)\right]^3
$$
$$
-\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2}+\cdots\right)(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots)=0 \tag{6-4-2}
$$

を得る．式中の ε に関する次数の等しい項をまとめると，

$$
\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2}+y_0=0 \tag{6-4-3}
$$
$$
\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}+y_1=-2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t\partial t_1}-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial y_0}{\partial t}\right)^3+\frac{\partial y_0}{\partial t} \tag{6-4-4}
$$
$$
\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

と続く漸化式を得る．

式 (6-4-3) の一般解は前節と同じく，

$$
y_0=A(t_1,\ldots)\exp(+it)+A(t_1,\ldots)^*\exp(-it) \tag{6-4-5}
$$

と表すことができる．ここに $A(t_1,\ldots)$ は短い時間スケール t には依存しない複素関数，$A(t_1,\ldots)^*$ はその複素共役である．式 (6-4-5) を (6-4-4) に代入すると，

$$
\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}+y_1=i\frac{A^3}{3}\exp(3it)-i\frac{(A^*)^3}{3}\exp(-3it)
$$
$$
-i\left(A^2A^*-A+2\frac{\partial A}{\partial t_1}\right)\exp(it)+i\left(A(A^*)^2-A^*+2\frac{\partial A^*}{\partial t_1}\right)\exp(-it) \tag{6-4-6}
$$

を得る．

さて，次項で証明するように微分方程式 (6-4-1) の解は $t\to+\infty$ で初期条件にかかわらず，位相平面における極限循環軌道に近づくので有界である．それゆえ，「微分方程式 (6-4-6) の解 y_1 に永年項が現れない」という条件を課すことができる．そのためには，式 (6-4-6) 右辺の $\exp(+it)$ および $\exp(-it)$ の係数が 0 でなければならない．この条件により，$A(t_1,\ldots), A(t_1,\ldots)^*$ の時間スケール t_1 に関する微分方程式

$$
2\frac{\partial A}{\partial t_1}+A^2A^*-A=0 \tag{6-4-7}
$$
$$
2\frac{\partial A^*}{\partial t_1}+A(A^*)^2-A^*=0 \tag{6-4-8}
$$

を得る．なお，式 (6-4-8) は (6-4-7) の複素共役である．

式 (6-4-7) を解くに際し，複素関数 $A(t_1,\ldots)$ をその絶対値 $R(t_1,\ldots)$ と位相 $\theta(t_1,\ldots)$

(いずれも実数) で表すと式の展開に好都合である.

$$A(t_1,\dots)=R(t_1,\dots)\exp\big(i\theta(t_1,\dots)\big) \tag{6-4-9}$$

式 (6-4-9) を (6-4-7) に代入し, 共通因子 $\exp\big(i\theta(t_1,\dots)\big)$ を取り除いた式の実部と虚部より

$$\frac{dR}{dt_1}=-\frac{1}{2}R^3+\frac{1}{2}R \tag{6-4-10}$$

$$\frac{d\theta}{dt_1}=0 \tag{6-4-11}$$

を得る. これらの解は,

$$R(t_1,\dots)=\frac{R_0}{\sqrt{\exp(-t_1)+R_0^2\big(1-\exp(-t_1)\big)}} \tag{6-4-12a}$$

$$\theta(t_1,\dots)=\theta_0 \tag{6-4-12b}$$

であり, 近似解の主要部 (6-4-5) の振幅

$$A(t_1,\dots)=\frac{R_0}{\sqrt{\exp(-t_1)+R_0^2\big(1-\exp(-t_1)\big)}}\exp(i\theta_0) \tag{6-4-13}$$

を得る. したがって, 近似解の主要部 y_0 は,

$$y\sim y_0=\frac{2R_0}{\sqrt{\exp(-t_1)+R_0^2\big(1-\exp(-t_1)\big)}}\cos(t+\theta_0)\qquad \varepsilon\to 0+ \tag{6-4-14}$$

となる.

解の主要部 y_0 は初期条件にかかわらず $t_1\to+\infty$ で極限循環軌道

$$y=2\cos(t+\theta_0)\quad \text{すなわち,}\quad y^2+u^2=4,\quad u\equiv dy/dt \tag{6-4-15}$$

に近づくことがわかる.

さらに, 初期条件 $y(0)=0, y'(0)=2v$ を課すと, 近似解の主要部 y_0(6-4-14) は

$$y_0=\frac{2v}{\sqrt{\exp(-\varepsilon t)+v^2\big(1-\exp(-\varepsilon t)\big)}}\sin t \tag{6-4-16}$$

となる.

図 6-2 と図 6-3 において, それぞれ初期条件, $v=0.1$ と $v=5.0$ に対応する, 複スケール解析による近似解 (点線) (6-4-16) ともとの微分方程式 (6-4-1) の差分法 ($\Delta t=\pi/40$) による数値解 (実線) を比較する.

両者はよく一致しており, それぞれのケースで内外側から極限循環軌道に近づくことを示している.

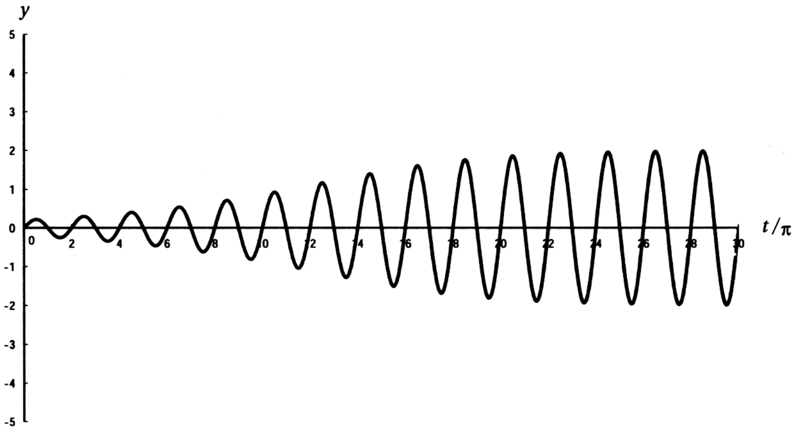


図 6-2　ファン・デル・ポール方程式 ($\varepsilon=0.1, \nu=0.1$) の複スケール解析近似解 (点線) と数値解 (実線)．線の太さの中に重なっている．

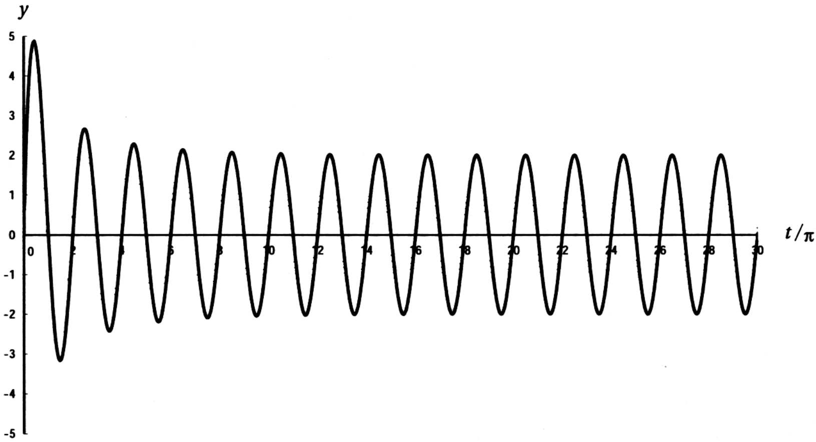


図 6-3　ファンデルポール方程式 ($\varepsilon=0.1, \nu=5.0$) の複スケール解析近似解 (点線) と数値解 (実線)．線の太さの中に重なっている．

■ ファン・デル・ポール方程式の解が $t\to+\infty$ で初期条件にかかわらず，位相平面における極限循環軌道に近づくこと

2 階微分方程式であるファン・デル・ポール方程式 (6-4-1) は次の 1 階連立微分方程式と等価である．

$$\frac{dy}{dt}=u \tag{6-4-17}$$

$$\frac{du}{dt} = -y - \varepsilon\left(\frac{1}{3}u^3 - u\right) \tag{6-4-18}$$

連立微分方程式 (6-4-17,18) の両者の右辺をともに0とする y - u 平面（位相平面）上の点（臨界点）は原点 (0,0) のみである．そして臨界点近傍では微分方程式 (6-4-18) を線形近似することができる

$$\frac{du}{dt} = -y + \varepsilon u \tag{6-4-18a}$$

線形連立微分方程式 (6-4-17,18a) を行列形式で表すと，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{du}{dt} \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \tag{6-4-19}$$

となり，行列 M の固有値

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2} = \frac{\varepsilon \pm i\sqrt{4 - \varepsilon^2}}{2} \tag{6-4-20}$$

は正の実部をもつ共役複素数である．したがって，微分方程式 (6-4-19) の一般解は固有値 λ_1, λ_2 とそれぞれに対応する固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ を用いて，

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}\exp(\lambda_1 t) + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}\exp(\lambda_2 t) \tag{6-4-21}$$

と表すことができる．ここに C_1, C_2 は定数である．

指数 λ_1, λ_2 は正の実部をもつ共役複素数であるから，y-u 平面上の解を表す点 $(y(t), u(t))$ は時間とともに臨界点 (0,0) から螺旋運動をしつつ遠ざかる．すなわち，臨界点 (0,0) は**不安定螺旋点**（unstable spiral point）である．

次に，連立微分方程式 (6-4-17,18) の y - u 平面上の無限遠点付近での振る舞いを調べる．無限遠点付近では微分方程式 (6-4-18) を

$$\frac{du}{dt} = -y - \frac{\varepsilon}{3}u^3 \tag{6-4-18b}$$

と近似することができる．

微分方程式 (6-4-17) の両辺に y を，また微分方程式 (6-4-18b) の両辺に u を乗じて両式を加えると，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y^2 + u^2) = -\frac{\varepsilon}{3}u^4 \tag{6-4-22}$$

を得る．

式 (6-4-22) の左辺は，y - u 平面上の点 $(y(t), u(t))$ の原点からの距離の2乗の時間変化率であり，右辺はそれが負であることを示している．すなわち，y - u 平面上無限遠点付近では解を表す点 $(y(t), u(t))$ は原点方向に移動する．

一方で原点から遠ざかる $(y(t),u(t))$ の軌道が存在し，他方，無限遠点から原点方向に移動する $(y(t),u(t))$ の軌道が存在する．かつ，連立微分方程式 (6-4-17,18) の右辺は $(y(t),u(t))$ の連続関数であるから，解の存在と一意性の定理よりこれらの軌道は交叉することがない（[10]）．

それゆえ，y - u 平面上のどこかに軌道の集積（極限循環軌道）が存在することになる．本節の解析でその極限循環軌道

$$y^2+u^2=4 \qquad \text{(6-4-15 再掲)}$$

を特定することができたのである．

6-5 境界層問題

永年項問題の解決という観点から，複スケール解析の応用例としてここまでもっぱら振動現象を取り扱ってきた．ところで，先に考察した境界層問題・WKB 法問題においてもごく自然に複数のスケールが現れてきていることに読者は気づいているだろう．複スケール解析は，境界層問題・WKB 法問題を含む，より幅広い現象を記述する微分方程式系にも適用可能なのである．本節では，その一例として境界層理論（第 4 章）による境界層問題の近似解を複スケール解析により得ることができることを示す．

4-2 節で考察した次の境界層問題を再び取り上げる．

$$\varepsilon y''+p(x)y'+q(x)y=0,\quad 0\le x\le 1,\quad p(x)>0,\quad y(0)=C,\quad y(1)=D\qquad \varepsilon\to 0+$$

(4-2-1 再掲)

その際，この問題の解 $y(x)$ が $x=0$ の近傍に厚さ $O(\varepsilon)$ の境界層をもつこと，また，x は解 $y(x)$ の外域での振る舞いを記述するのに相応しい変数であり，境界層内部を記述するのに便利な変数は次式で定義される t であることを示した．

$$x=\varepsilon t \qquad \text{(6-5-1)}$$

つまり，境界層理論では変数 x に加えて短い長さスケール t を導入した．一方，複スケール解析ではもとの変数に加えて長いスケールを導入する．そこで，微分方程式 (4-2-1) の独立変数を x から t に変換し，変数 t を複スケール解析の基本変数にする．そのとき，微分方程式 (4-2-1) は

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p(\varepsilon t)\frac{dy}{dt}+\varepsilon q(\varepsilon t)y=0 \qquad \text{(6-5-2)}$$

となる．こうして変換された微分方程式 (6-5-2) はすでに最高階に微小係数をもつ構造的特異摂動問題ではなくなっていることに注意されたい．

以下，複スケール解析の恒例の手順に従い，この境界層問題を解いてゆく．

式 (6-5-2) の解 y を微小パラメータ ε で展開すると同時に

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots \tag{1-2-13 再掲}$$

境界層内部を記述する長さスケール t に加え，それより長いスケール

$$t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t, \cdots \tag{6-2-1 再掲}$$

を導入する．この t_1 が解 $y(x)$ の外域での振る舞いを記述する変数 x である．このとき，本来の t による微分は式 (6-2-2) で与えられる．

式 (1-2-13)，(6-2-2) を式 (6-5-2) に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t \partial t_1} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial t \partial t_2}\right) + \cdots\right]\left(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots\right) \\
&+ p(t_1)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots\right)\left(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots\right)\right] \\
&+ \varepsilon q(t_1)\left(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots\right) = 0
\end{aligned} \tag{6-5-3}$$

を得る．式中の ε に関する次数の等しい項をまとめると，

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} + p(t_1)\frac{\partial y_0}{\partial t} = 0 \tag{6-5-4}$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + p(t_1)\frac{\partial y_1}{\partial t} = -2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t \partial t_1} - p(t_1)\frac{\partial y_0}{\partial t_1} - q(t_1) y_0 \tag{6-5-5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

と続く漸化式を得る．微分方程式 (6-5-4) の解である主要部 y_o は

$$y_o = A(t_1, \ldots) + B(t_1, \ldots)\exp\left(-p(t_1)t\right) \tag{6-5-6}$$

である．これを1次の微分方程式 (6-5-5) に代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + p(t_1)\frac{\partial y_1}{\partial t} = &-\left[p(t_1)\frac{\partial A}{\partial t_1} + q(t_1)A\right] \\
&+ \left[p(t_1)\frac{\partial B}{\partial t_1} - q(t_1)B + \left(2 - p(t_1)t\right)p'(t_1)B\right]\exp\left(-p(t_1)t\right)
\end{aligned} \tag{6-5-7}$$

を得る．

式 (6-5-7) の右辺第1項（カギカッコ）は変数 t に関して定数であり，定数は対応する斉次方程式 (6-5-4) の解である．それゆえこの定数が0でない限り，式 (6-5-7) の解 $y_1(t)$ には変数 t に比例する永年項

$$-\left[p(t_1)\frac{\partial A}{\partial t_1} + q(t_1)A\right] t \Big/ p(t_1) \tag{6-5-8}$$

が現れてしまう．なお，式 (6-5-7) の右辺第 2 項 $\exp(-p(t_1)t)$ も対応する斉次方程式の解であるが，$p(x)>0$ であるから解 $y_1(t)$ に永年項をもたらさない．

一方，境界層内の解は式 (6-5-8) のように変数 t に比例する形で発散することはできない．もし発散すれば外域解と漸近接続することが不可能になるからである．そこで，解 $y_1(t)$ に永年項が現れないことを式 (6-5-7) に課すことができる．すなわち，式 (6-5-7) の右辺第 1 項（カギカッコ）は 0 でなければならない．

そこで

$$p(t_1)\frac{\partial A}{\partial t_1}+q(t_1)A=0 \tag{6-5-9}$$

とおくと，この方程式は容易に解くことができ，

$$A(t_1,\ldots)=A_1\exp\left(\int_{t_1}^{1}\frac{q(u)}{p(u)}du\right) \qquad (A_1\text{：定数}) \tag{6-5-10}$$

を得る．これと式 (6-5-6) より近似解の主要部

$$y_o=A_1\exp\left(\int_{t_1}^{1}\frac{q(u)}{p(u)}du\right)+B(t_1,\ldots)\exp\left(-p(t_1)t\right) \tag{6-5-11}$$

を得る．変数を t から，もとの方程式 (4-2-1) の変数 $x=t_1=\varepsilon t$ にもどすと，

$$y_o=A_1\exp\left(\int_{x}^{1}\frac{q(u)}{p(u)}du\right)+B(x,\ldots)\exp\left(-p(x)x/\varepsilon\right) \tag{6-5-12}$$

と表すことができる．

式 (6-5-12) の右辺第 2 項の $\exp\left(-p(x)x/\varepsilon\right)$ は $x=O(1)$ で急激に減衰する関数であるから，$\exp(-p(x)x/\varepsilon)$ を $\exp(-p_0x/\varepsilon)$ で，またその係数 $B(x,\ldots)$ を $B(x=0,\ldots)=B_1$ で置き換えることができる．

$$B(x,\ldots)\exp\left(-p(x)x/\varepsilon\right)\sim B_1\exp\left(-p_0x/\varepsilon\right) \qquad \varepsilon\to 0+ \tag{6-5-13}$$

これを用いると，一般解

$$y_o\sim A_1\exp\left(\int_{x}^{1}\frac{q(u)}{p(u)}du\right)+B_1\exp\left(-p_0x/\varepsilon\right) \qquad \varepsilon\to 0+ \tag{6-5-14}$$

を得る．ここで，境界条件 $y(0)=C, y(1)=D$，すなわち，

$$A_1\exp\left(\int_{0}^{1}\frac{q(u)}{p(u)}du\right)+B_1=C \tag{6-5-15}$$

$$A_1\sim D \qquad \varepsilon\to 0+ \tag{6-5-16}$$

を課すと，最終的に，複スケール解析による近似解の主要部

$$y_o\sim D\exp\left(\int_{x}^{1}\frac{q(u)}{p(u)}du\right)+\left(C-D\exp\left(\int_{0}^{1}\frac{q(u)}{p(u)}du\right)\right)\exp\left(-p_0x/\varepsilon\right) \qquad \varepsilon\to 0+ \tag{6-5-17}$$

を得る．これは，区間 $0\le x\le 1$ 全体で成立する境界層の統一解 (4-2-16) に一致している．すなわち，境界層問題の境界層理論による近似解を，複スケール解析により再現

することができたのである．なお，ここでも漸近接続を行っていないことに注意されたい．

6-6　複スケール系列の一般化　WKB 法問題

ここまでの例題から，複スケール解析が極めて応用範囲の広い汎用的な微分方程式の近似解法であることが理解できたことだろう．さらに広い範囲の微分方程式群に複スケール解析を適用する際に，これまで親しんできた式 (6-2-1) 型の独立変数の複スケールの系列では不都合が生じ，より一般化した複スケール系列を導入する必要が出てくる場合がある．

本節では 5-3 節で得たシュレディンガー型方程式の WKB 法による近似解を複スケール解析により再現する例題を通じて，複スケール系列を一般化しなければならなくなる事情とその方法をみてゆく．

5-3 節で WKB 法により近似解を求めたシュレディンガー型方程式

$$\varepsilon^2 y''(x) = A(x)y(x), \quad A(x) \neq 0 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{5-2-1 再掲}$$

において独立変数を長い (時間または長さの) スケール x から短いスケール t に変換すると，

$$x = \varepsilon t \ (= t_1) \tag{6-6-1}$$

微分方程式 (5-2-1) は

$$\frac{d^2 y(t,\varepsilon t)}{dt^2} = A(\varepsilon t)y(t,\varepsilon t) \tag{6-6-2}$$

となる．式 (6-6-2) は構造的特異摂動問題ではなくなっており，式中の $A(\varepsilon t)$ は長いスケール x にのみ依存してゆっくり変化するが，解 $y(t,\varepsilon t) = y(t,t_1)$ は短いスケール t に依存して速く変化する成分を有する．

式 (6-6-2) の解 y を微小パラメータ ε で展開し，

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots \tag{1-2-13 再掲}$$

これまで通り，独立変数のスケールの系列

$$t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t, \cdots \tag{6-2-1 再掲}$$

を導入してみる．このとき，本来の t による微分は式 (6-2-2) で与えられる．

式 (1-2-13)，(6-2-2) を (6-6-2) に代入すると，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t \partial t_1} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial t \partial t_2}\right) + \cdots\right)(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots)$$

$$= A(t_1)\left(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots\right) \tag{6-6-3}$$

を得る．

ここで ε に関する次数の等しい項をまとめると，

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} - A(t_1)y_0 = 0 \tag{6-6-4}$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} - A(t_1)y_1 = -2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t\partial t_1} \tag{6-6-5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

と続く漸化式を得る．

式 (6-6-4) は容易に解くことができ，主要部 y_0

$$y_0 = D_1(t_1)\exp\left(+\sqrt{A(t_1)}\,t\right) + D_2(t_1)\exp\left(-\sqrt{A(t_1)}\,t\right) \tag{6-6-6}$$

を得る．これを 1 次の項 y_1 の式 (6-6-5) に代入すると

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} - A(t_1)y_1 = -2\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\left(D_1(t_1)\sqrt{A(t_1)}\right) + \frac{tD_1(t_1)}{2}\frac{\partial A(t_1)}{\partial t_1}\right]\exp\left(+t\sqrt{A(t_1)}\right)$$

$$-2\left[-\frac{\partial}{\partial t_1}\left(D_2(t_1)\sqrt{A(t_1)}\right) + \frac{tD_2(t_1)}{2}\frac{\partial A(t_1)}{\partial t_1}\right]\exp\left(-t\sqrt{A(t_1)}\right) \tag{6-6-7}$$

となる．

式 (6-6-7) の右辺の $\exp\left(\pm t\sqrt{A(t_1)}\right)$ は非斉次方程式 (6-6-5) に対応する斉次方程式 (6-6-4) の解であるから，式 (6-6-7) の解

$$y_1 = \left[C + \left(-\frac{\partial D_1(t_1)}{\partial t_1} - \frac{D_1(t_1)}{4A(t_1)}\frac{\partial A(t_1)}{\partial t_1}\right)t - \frac{D_1(t_1)}{4\sqrt{A(t_1)}}\frac{\partial A(t_1)}{\partial t_1}t^2\right]\exp\left(\sqrt{A(t_1)}\,t\right)$$

$$+\left[D + \left(-\frac{\partial D_2(t_1)}{\partial t_1} - \frac{D_2(t_1)}{4A(t_1)}\frac{\partial A(t_1)}{\partial t_1}\right)t + \frac{D_2(t_1)}{4\sqrt{A(t_1)}}\frac{\partial A(t_1)}{\partial t_1}t^2\right]\exp\left(-\sqrt{A(t_1)}\,t\right) \tag{6-6-8}$$

に，t および t^2 に比例する永年項が現れる．ここに，C, D は積分定数である．

A）まず A が負の場合を考えると，解 y_1(6-6-8) は

$$\exp\left(\pm\sqrt{A}\,t\right) = \exp(\pm i\omega t) \qquad (\omega:\text{実数}) \tag{6-6-9}$$

と振動解になるので，式 (6-6-8) の右辺に永年項が現れないためには

$$D_1(t_1) = D_2(t_1) = 0 \tag{6-6-10}$$

でなければならず，それは

$$y_0 = 0$$

を意味する．

B）A が正の場合には，式 (6-6-8) の右辺に永年項が現れないためには $t \to +\infty$ の極限で発散する解 $\exp\left(+\sqrt{A}t\right)$ の係数が 0 でなければならず，

$$D_1(t_1) = 0 \tag{6-6-11}$$

が必要となる一方，$D_2(t_1)$ を決めるべき何の条件も得られない．

すなわち，A)，B) いずれの場合にも

「1 次の解 y_1 に永年項が現れないという条件が主要部 y_0 の長いスケールに依存する係数 $D_1(t_1), D_2(t_1)$ を決定する」

というこれまで成功してきた，独立変数のスケールの系列 (6-2-1) を使用した（オーソドックスな）複スケール解析の手順が機能しないことを意味している．

そこで，永年項を取り除く条件をスムーズに与えうる新しい型の独立変数のスケールの系列を探すにあたり，以下では $A(x) < 0$（振動解）を考える．

独立変数のスケールの系列 (6-2-1) を使用した複スケール解析が成功してきたこれまでの問題と微分方程式 (6-6-2) の異なる点は，微分方程式 (6-6-2) 中の右辺 $y(x)$ の係数 $A(t_1)$ が t_1 に依存することである[*1]．その結果，式 (6-6-5) の右辺

$$-2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t \partial t_1}$$

を通じて，式 (6-6-7) の右辺 $\exp\left(\pm\sqrt{A(t_1)}t\right)$ の係数の中に短いスケール t が現れたのである．

そこで，**一般化したスケール**

$$t_0 = \varphi(t) \tag{6-6-12}$$

を導入し，新しい二つの長さのスケールを用いることにする．

$$t_0, \quad x = t_1 = \varepsilon t \tag{6-6-13}$$

このとき，変数 t による微分と t_0 による微分との関係は次式で与えられる．

$$\frac{d}{dt} = \varphi'(t)\frac{d}{dt_0}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \varphi''(t)\frac{d}{dt_0} + \left(\varphi'(t)\right)^2\frac{d^2}{dt_0^2} \tag{6-6-14}$$

式 (6-6-14) を (6-6-2) に代入すると，

$$\varphi''(t)\frac{dy}{dt_0} + \left(\varphi'(t)\right)^2\frac{d^2 y}{dt_0^2} - A(\varepsilon t)y = 0$$

すなわち

*1 6-5 節の境界層問題も同じ問題をはらんでいたが，式 (6-5-7) の右辺第 2 項の係数を 0 にする必要がなかったため問題が顕在化しなかった．

$$\frac{d^2y}{dt_0^2}-\frac{A(\varepsilon t)}{(\varphi'(t))^2}y+\frac{\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}\frac{dy}{dt_0}=0 \tag{6-6-15}$$

を得る．ここに，変数 t は式 (6-6-12) を通じて変数 t_0 の関数である．

ここで，$\varphi(t)$ を，

$$\varphi'(t)=\sqrt{-A(\varepsilon t)}=\sqrt{|A(\varepsilon t)|} \tag{6-6-16a}$$

すなわち

$$t_0=\varphi(t)=\int^t\sqrt{-A(\varepsilon u)}du=\frac{1}{\varepsilon}\int^{t_1}\sqrt{-A(s)}ds \tag{6-6-16b}$$

と選ぶことにすれば，これまで複スケール解析が成功して来た微分方程式と同様に，微分方程式 (6-6-15) の y の係数を定数とすることができる．すなわち，式 (6-6-15) は

$$\frac{d^2y}{dt_0^2}+y-\varepsilon\frac{A'(t_1)}{2\left(\sqrt{-A(t_1)}\right)^3}\frac{dy}{dt_0}=0 \tag{6-6-17}$$

となる．

以下，式 (6-6-16b) を基礎に，

$$t_0=\varphi(t),\quad t_1=x=\varepsilon t \tag{6-6-18}$$

をそれぞれ短いスケールと長いスケールとし，ε による漸近級数展開 (1-2-13) による解を求める．このとき，式 (6-6-17) 中の t_0 による全微分は次のように置き換えなければならない．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt_0}&\to\frac{\partial}{\partial t_0}+\frac{\partial t_1}{\partial t_0}\frac{\partial}{\partial t_1}+\cdots=\frac{\partial}{\partial t_0}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{-A(t_1)}}\frac{\partial}{\partial t_1}+\cdots\\ \frac{d^2}{dt_0^2}&\to\frac{\partial^2}{\partial t_0^2}+\frac{2\varepsilon}{\sqrt{-A(t_1)}}\frac{\partial^2}{\partial t_0\partial t_1}+\cdots\end{aligned} \tag{6-6-19}$$

式 (6-6-19) と (1-2-13) を式 (6-6-17) に代入すると，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial t_0^2}+\frac{2\varepsilon}{\sqrt{-A(t_1)}}\frac{\partial^2}{\partial t_0\partial t_1}+\cdots\right)(y_0+\varepsilon y_1+\cdots)+(y_0+\varepsilon y_1+\cdots)\\ &=\varepsilon\frac{A'(t_1)}{2\left(\sqrt{-A(t_1)}\right)^3}\left(\frac{\partial}{\partial t_0}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{-A(t_1)}}\frac{\partial}{\partial t_1}+\cdots\right)(y_0+\varepsilon y_1+\cdots)\end{aligned} \tag{6-6-20}$$

を得る．ε に関する次数の等しい項をまとめると，

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0^2}+y_0=0 \tag{6-6-21}$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_0^2}+y_1=-\frac{2}{\sqrt{-A(t_1)}}\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0\partial t_1}+\frac{A'(t_1)}{2\left(\sqrt{-A(t_1)}\right)^3}\frac{\partial y_0}{\partial t_0} \tag{6-6-22}$$

を得る．

式 (6-6-21) の解は，

$$y_0 = D_1(t_1)\exp(i t_0) + D_2(t_1)\exp(-i t_0) \tag{6-6-23}$$

と表すことができ，これを (6-6-22) に代入すると

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_0^2} + y_1 = -i\left[\frac{2}{\sqrt{-A(t_1)}}\frac{\partial D_1(t_1)}{\partial t_1} - \frac{A'(t_1)}{2\left(\sqrt{-A(t_1)}\right)^3}D_1(t_1)\right]\exp(i t_0)$$
$$+ i\left[\frac{2}{\sqrt{-A(t_1)}}\frac{\partial D_2(t_1)}{\partial t_1} - \frac{A'(t_1)}{2\left(\sqrt{-A(t_1)}\right)^3}D_2(t_1)\right]\exp(-i t_0) \tag{6-6-24}$$

を得る．

式 (6-6-24) の解 y_1 に永年項が現れないためには式 (6-6-24) の二つのカッコ [　] の中が 0 でなければならない．

$$\frac{\partial D_1(t_1)}{\partial t_1} = -\frac{A'(t_1)}{4A(t_1)}D_1(t_1), \quad \frac{\partial D_2(t_1)}{\partial t_1} = -\frac{A'(t_1)}{4A(t_1)}D_2(t_1) \tag{6-6-25}$$

これから

$$D_1(t_1) = C_1 A(t_1)^{-1/4}, \quad D_2(t_1) = C_2 A(t_1)^{-1/4} \tag{6-6-26}$$

を得，これと式 (6-6-23) から y_0

$$y_0 = C_1 A(t_1)^{-1/4}\exp(i t_0) + C_2 A(t_1)^{-1/4}\exp(-i t_0) \tag{6-6-27}$$

が定まる．ここで，変数を

$$t_0 = \varphi(t) = \int^t \sqrt{-A(\varepsilon u)}\,du = \frac{1}{\varepsilon}\int^{t_1}\sqrt{-A(s)}\,ds \tag{6-6-16b 再掲}$$

から，もとの方程式 (5-2-1) の変数 $x = t_1$ にもどすと，最終的に

$$y_o = C_1 A(x)^{-1/4}\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int^x \sqrt{-A(s)}\,ds\right) + C_2 A(x)^{-1/4}\exp\left(-\frac{i}{\varepsilon}\int^x \sqrt{-A(s)}\,ds\right) \tag{6-6-28}$$

を得る．まさしくこれは 5-3 節で WKB 法で求めた $y(x)$ の主要部の一般解 (5-3-7) において $A(x) < 0$ のケースである．

つまり，一般化した複スケール解析の適用範囲は WKB 法問題も含むのである．

上の取り扱いからわかるように，必要に応じて導入する一般化スケール

$$t_0 = \varphi(t) \tag{6-6-12 再掲}$$

の関数形は個々の問題ごとに決定する必要がある．

6-7　宇宙工学への応用

4-6 節で考察した宇宙工学の問題，すなわち，初速度のみを与えられた宇宙船が地球と月の万有引力の作用のもと地球から月に到達する古典力学の問題を，複スケール解析により解いてみよう（[35]）．本問題も一般化したスケールを用いる一例である．

4-6 節で定式化した基礎方程式は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon}{1-x} \tag{4-6-4 再掲}$$

であり，ここでは規格化した（地球の重心からの）距離 x および経過時間 t

$$x = X/R \tag{4-6-2a 再掲}$$

$$t = T\sqrt{Gm_E/R^3} \tag{4-6-2b 再掲}$$

を用い，月と地球の質量比

$$\varepsilon \equiv \frac{m_M}{m_E} \cong 0.012$$

を微小量として利用している．

また，4-6 節の定義と同じく，$m_E = 5.97 \times 10^{24}\mathrm{kg}$，$m_M = 7.35 \times 10^{22}\mathrm{kg}$ はそれぞれ地球，月の質量，$R = 1.92 \times 10^5\mathrm{km}$ は地球と月の重心間距離，X は地球の重心を原点とする宇宙船の位置（図 4-6），T は時間，$G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg}\cdot s^2)$ は万有引力定数である．

本節においても，経過時間 $t(x)$ を地球からの距離 x の関数とみなす．

さて，宇宙船が月に接近し $1 - x = O(\varepsilon)$ になると月による万有引力が地球による万有引力に比べもはや微小量ではなくなり，通常の（単純な）摂動展開は破綻をきたすので，本節では，二つの長さスケール

$$s = x \tag{6-7-1}$$

$$\varepsilon u = 1 - x \tag{4-6-12 再掲}$$

を導入し*1，全区間で精度を保つ一様に成立する漸近級数解

$$t = t_0(s,u) + \varepsilon t_1(s,u) + \varepsilon^2 t_2(s,u) + \cdots \tag{6-7-2}$$

を複スケール解析により求める．

このとき，本来の距離 x による微分は次式で与えられる．

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial u} \tag{6-7-3}$$

したがって，微分方程式 (4-6-4) は新しい独立変数 s, u をもつ微分方程式

*1 本節では変数 t は経過時間を表す従属変数であるから，内変数として使用できない．

$$\left(\frac{\partial t}{\partial s}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial t}{\partial u}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{u}\right)^{-1/2} \tag{6-7-4a}$$

すなわち，

$$\frac{\partial t}{\partial u}=\varepsilon\left(\frac{\partial t}{\partial s}-\sqrt{\frac{su}{2(s+u)}}\right) \tag{6-7-4b}$$

に変換される．式 (6-7-2) を (6-7-4b) に代入し，式中の ε に関する次数の等しい項をまとめると，

$$\frac{\partial t_0}{\partial u}=0 \tag{6-7-5}$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial u}=\frac{\partial t_0}{\partial s}-\sqrt{\frac{su}{2(s+u)}} \tag{6-7-6}$$

$$\frac{\partial t_k}{\partial u}=\frac{\partial t_{k-1}}{\partial s} \qquad (k=2,3,\ldots) \tag{6-7-7}$$

と続く漸化式を得る．

微分方程式 (6-7-5) の一般解を

$$t_0=\frac{1}{\sqrt{2}}A(s) \tag{6-7-8}$$

と書いておくと以下で好都合である．ここに $A(s)$ は変数 s のみの関数である．

主要部 (6-7-8) を式 (6-7-6) に代入すると

$$\sqrt{2}\frac{\partial t_1}{\partial u}=A'(s)-\sqrt{\frac{su}{s+u}} \tag{6-7-9}$$

を得る．その一般解は

$$\sqrt{2}t_1(s,u)=A'(s)u-\sqrt{su(s+u)}+s^{3/2}\log\left(\sqrt{\frac{u}{s}}+\sqrt{1+\frac{u}{s}}\right)+B(s) \tag{6-7-10}$$

である．ここに $B(s)$ は変数 s のみの関数である．

ここで，変数 $u=(1-x)/\varepsilon$ が 1 に比べて十分大きい極限をとると，

$$\sqrt{2}t_1(s,u)\sim\left(A'(s)-\sqrt{s}\right)u+s^{3/2}\log\left(2\sqrt{\frac{u}{s}}\right)+B(s)\quad u\to+\infty,\quad \varepsilon\to 0+ \tag{6-7-11}$$

を得る．経過時間 $t(x)$ はもちろん有界であるから,「$t_1(s,u)$ の式 (6-7-11) 中に残っておりこのままでは発散する項が消える」という条件を課することができる．

複スケール解析の前節までの取り扱いでは「高次項に永年項が現れない」という条件から前の項の長いスケール依存性を導いたが，さらに一般的取り扱いにおいては「高次項が定義域全体にわたり一様に成立する解を有する」という条件から前の項の長いスケール依存性を導く (7-5 節参照)．このうち，$u\to+\infty$ すなわち $x\to+0$ の極限で変数 u に比例して発散する第 1 項の係数が 0 になる条件

$$A'(s)-\sqrt{s}=0 \tag{6-7-12}$$

から，

$$A(s)=\frac{2}{3}s^{3/2}+C \tag{6-7-13}$$

を得る．ここに C は積分定数であり，初期条件 $t_0(s=0,u)=0$ により，

$$C=0 \tag{6-7-13a}$$

と定まる．

もう一つの対数発散する項を取り除く条件を得るために，$\log\left(2\sqrt{u/s}\right)$ 中の変数 u を変数 s で表すと，

$$s^{3/2}\log\left(2\sqrt{\frac{u}{s}}\right)+B(s)=s^{3/2}\log\left(2\sqrt{\frac{1-s}{\varepsilon s}}\right)+B(s)=0 \tag{6-7-14}$$

を得る．その第 1 項，$s^{3/2}\log\left(2\sqrt{\dfrac{1-s}{\varepsilon s}}\right)$ は，$s=x\to 0+$ の極限では発散せず，$s=x\to 1-0$ の極限で発散する．そこで，

$$B(s)=-\frac{1}{2}s^{3/2}\log(1-s)+D(s) \tag{6-7-15}$$

がその発散を抑える条件となる．ここに $D(s)$ は変数 s のみの（発散しない）関数である．

式 (6-7-10,13,15) により，経過時間 $t(x)$ の漸近級数展開の第 2 項

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}t_1(s,u)\\&=\sqrt{s}u-\sqrt{su(s+u)}+s^{3/2}\log\left(\sqrt{\frac{u}{s}}+\sqrt{1+\frac{u}{s}}\right)-\frac{1}{2}s^{3/2}\log(1-s)+D(s)\end{aligned} \tag{6-7-16}$$

を得る．式 (6-7-16) を式 (6-7-7)$(k=2)$ に代入すると，

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\frac{\partial t_2}{\partial u}&=\frac{u}{2\sqrt{s}}-\frac{u(2s+u)}{2\sqrt{su(s+u)}}+\frac{3}{2}\sqrt{s}\log\left(\sqrt{\frac{u}{s}}+\sqrt{1+\frac{u}{s}}\right)-\frac{\sqrt{us}}{2\sqrt{u+s}}\\&\quad-\frac{3}{4}\sqrt{s}\log(1-s)+\frac{s^{3/2}}{2(1-s)}+D'(s)\end{aligned} \tag{6-7-17}$$

を得る．

式 (6-7-17) で $u\to+\infty$ すなわち $x\to+0$ の極限をとると，

$$\sqrt{2}\frac{\partial t_2}{\partial u}\sim-\frac{5\sqrt{s}}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{s}\log\left(2\sqrt{\frac{u}{s}}\right)-\frac{3}{4}\sqrt{s}\log(1-s)+\frac{s^{3/2}}{2(1-s)}+D'(s) \qquad u\to+\infty,\quad \varepsilon\to 0+ \tag{6-7-18}$$

を得る．ここで再度，項 $\log\left(2\sqrt{u/s}\right)$ 中の変数 u を変数 s で表すと，

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\frac{\partial t_2}{\partial u}&\sim-\frac{5\sqrt{s}}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{s}\log\left(2\sqrt{\frac{1-s}{\varepsilon s}}\right)-\frac{3}{4}\sqrt{s}\log(1-s)+\frac{s^{3/2}}{2(1-s)}+D'(s)\\&\sim\left[-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\log 2-\frac{3}{4}\log(\varepsilon s)\right]\sqrt{s}+\frac{s^{3/2}}{2(1-s)}+D'(s)\\&\qquad u\to+\infty\quad(s=x\to 0+),\quad \varepsilon\to 0+\end{aligned} \tag{6-7-19}$$

となるので，高次の項 $t_2(s,u)$ が $u\to+\infty$ すなわち $s=x\to 0+$ の極限で発散しないという条件

$$D'(s)=-\frac{s^{3/2}}{2(1-s)}-\left[-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\log 2-\frac{3}{4}\log(\varepsilon)\right]\sqrt{s} \tag{6-7-20}$$

から $D(s)$ が定まる．

$$D(s)=-\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{s}}{1-\sqrt{s}}+\sqrt{s}+\frac{5}{6}s^{3/2}+\frac{1}{2}s^{3/2}\log\left(\frac{\varepsilon s}{4}\right)+E \tag{6-7-21}$$

ここに E は積分定数であり，初期条件 $t_1(s=0,u)=0$ により，

$$E=0 \tag{6-7-21a}$$

と定まる．

式 (6-7-8,13,16,21) を (6-7-2) に代入すると，

$$\sqrt{2}t(s,u)=\frac{2}{3}s^{3/2}+\varepsilon\left[\sqrt{s}u-\sqrt{su(s+u)}+s^{3/2}\log\left(\sqrt{\frac{u}{s}}+\sqrt{1+\frac{u}{s}}\right)-\frac{1}{2}s^{3/2}\log(1-s)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{s}}{1-\sqrt{s}}+\sqrt{s}+\frac{5}{6}s^{3/2}+\frac{1}{2}s^{3/2}\log\left(\frac{\varepsilon s}{4}\right)\right]+O(\varepsilon^2) \tag{6-7-22}$$

を得る．さらに，式 (6-7-22) において，独立変数を s,u からもとの x にもどすと，最終的に

$$t=\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{x}\frac{1-x}{\varepsilon}-\sqrt{x\frac{1-x}{\varepsilon}\left(x+\frac{1-x}{\varepsilon}\right)}+x^{3/2}\log\left(\sqrt{\frac{1-x}{\varepsilon x}}+\sqrt{1+\frac{1-x}{\varepsilon x}}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}x^{3/2}\log(1-x)-\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\sqrt{x}+\frac{5}{6}x^{3/2}+\frac{1}{2}x^{3/2}\log\left(\frac{\varepsilon x}{4}\right)\right]+O(\varepsilon^2) \tag{6-7-23}$$

を得る．

宇宙船が出発後 x 進むのに経過する時間を表す式 (6-7-23) は，同じ問題について 4-6 節で得た結果に一致している．

すなわち，式 (6-7-23) は，$1/x$ および $1/(1-x)$ が $O(1)$ である区間すなわち外域においては式 (4-6-11) に，また，$1-x=O(\varepsilon)$ である区間すなわち内域においては式 (4-6-20) に，それぞれ $O(\varepsilon)$ で一致していることを確かめることができる（演習問題 6-5）．

第6章の演習問題

6-1　長さ l の振り子の運動方程式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \quad (g：重力加速度)$$

において，振幅が小さいときの近似解を複スケール解析により求め，振り子の周期の振幅依存性を明らかにせよ．

6-2　非線形減衰項をもつ調和振動子 (I)

初期値問題

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y+\varepsilon y^2\frac{dy}{dt}=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1 \qquad \varepsilon\to 0+$$

の複スケール解析による漸近級数解の主要部を求めよ.

6-3　非線形減衰項をもつ調和振動子 (II)

初期値問題

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y+\varepsilon(y')^3=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1 \qquad \varepsilon\to 0+$$

の複スケール解析による漸近級数解の主要部を求めよ.

6-4　非線形境界層問題

4-5 節において境界層理論により近似解を求めた境界値問題

$$\varepsilon y''+y'+y^2=0, \quad 0\le x\le 1, \quad y(0)=0, \quad y(1)=2 \qquad \varepsilon\to 0+ \tag{4-5-1}$$

の近似解を複スケール解析により求め，その 1 次の解が境界層理論による近似解 (4-5-11) と一致することを確認せよ.

なお，非線形項 y^2 が y^n ($n\ge 3$：整数) に変わるとき，解はどう変化するか検討せよ.

6-5　式 (6-7-23) が外域においては式 (4-6-11) に，また，内域においては式 (4-6-20) に，それぞれ $O(\varepsilon)$ で一致していることを示せ.

第7章

特異摂動法による海の波の解析（さらに音響工学・地震学への応用）

第 4～6 章で解説した特異摂動法は，その起源を流体力学や量子力学に求めることができるものの，これまでみてきたようにあらゆる分野の自然・社会・人文現象の法則をモデル化した微分方程式の近似解を得る方法として一般化されているので，その応用分野は極めて多岐にわたる．

ただ，厳密解のない微分方程式の近似解法という性質上，その応用例は各分野それぞれに複雑な微分方程式を取り扱う高等領域に属するものが多い．したがって，微分方程式の入門書で見られるように，一人の著者が多岐にわたる分野への応用例を詳しく紹介することは特異摂動法に関しては困難である．そこで，本章ではこれまで解説した特異摂動法の最後の応用例として，著者自身が携わってきた分野の一つ，海の表面波，すなわち重力を復元力とする**重力波**（gravity waves）を取り上げる．

海岸あるいは船から観察する波のほとんどがこれに属し，津波も極めて周期・波長の大きい重力波である．水面にはこれ以外に表面張力を復元力とするごく小規模な**表面張力波・さざなみ**（surface tension waves）が，また水中に温度差ないし塩分濃度差による密度差の境界面があればそれに起因する**内部波**（internal waves）が存在する．

海を見たことがないならばいざしらず，**波**という言葉を聞いて人々がまず想いうかべるのは，途切れることなく綿々と砂浜に打ち寄せる海の波であろう．海の波は，波動，さらに広く振動現象の代表的なものである．特異摂動法により海の波の諸現象を解明してゆく手順を学ぶことは，その他の波動・振動現象を記述する微分方程式の近似解を求める際に役立つはずである．

流体力学は，微分方程式を駆使する応用数学の代表的な分野の一つであり，なかでも水面の重力波の理論は高度な数学の手法を必要とする．したがって，狭いスペース

内で水面重力波の理論を基礎から応用まで網羅することはとうてい不可能であり，本章では，初めの7-1～4節と7-7節でその基礎をおさらいし，その他の節で，特異摂動法（微分方程式の近似解法）の応用という側面からいくつかの興味深いトピックを取り扱う．その中で，厳密解を得ることが不可能な問題に対して得られた近似解が，数値シミュレーションのノントリヴィアルな検証例を与えうることを示す．

最後に，音波および地震波が海の線形長波と数学的に等価であること，およびその結果，海の線形長波に関する問題に関して特異摂動法により得た成果を，対応する音響工学および地震学の問題にそのまま当てはめることができることを示す．

7-1　支配方程式

本章では，もっぱら密度一定の水の表面に発生する重力波を対象とする．本節で水面重力波を支配する微分方程式を，続いて次節で境界条件を導く．

波を記述する自然な物理量は，波を伝える媒質である水粒子の速度 $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ と水位 $\zeta(x,y,t)$ である．ここに，(x,y) は水平面内の直角座標，z は鉛直上向き座標（静止水面を基準：$z=0$），t は時間である（図7-1）．

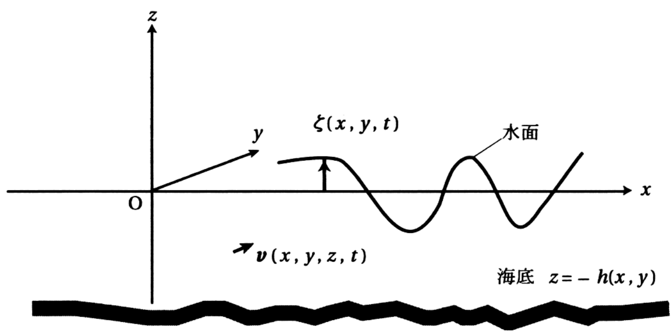


図7-1　水面重力波を記述する変数と座標

さて，流体力学の支配方程式はナヴィエ-ストークス方程式と連続の式である．場所と時間に伴う流体の密度変化が無視できる場合にはこれらはそれぞれ

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla(p+\rho gz)+\nu\nabla^2\boldsymbol{v} \tag{7-1-1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\quad \nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{7-1-2}$$

となる．ここに $p(x,y,z,t)$ は圧力，g は重力加速度，ρ，ν はそれぞれ水の密度と動粘

性係数である．

4-1 節「流体の境界層と境界層理論」で説明したように，水の粘性は水底近傍のごく限定された領域，**境界層**においてのみ重要な役割を果たすので，水面重力波の理論ではこれを無視することができる．また，水面重力波の広範な興味深い問題において**非回転性**（渦なし）の仮定

$$\nabla \times \boldsymbol{v}(x, y, z, t) = 0 \tag{7-1-3}$$

が成り立つ．このとき，速度 $\boldsymbol{v}(x, y, z, t) = \big(u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)\big)$ は速度ポテンシャル $\varphi(x, y, z, t)$ の勾配ベクトル（gradient）の形に表現できる．

$$\boldsymbol{v}(x, y, z, t) = \nabla\varphi(x, y, z, t) \tag{7-1-4}$$

式 (7-1-4) を連続の式 (7-1-2) に代入すると，速度ポテンシャル φ を未知関数とするラプラス方程式

$$\nabla^2\varphi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = 0 \tag{7-1-5}$$

を得る．一方，非粘性・非回転性の仮定を用いるとナヴィエ-ストークス方程式を積分することができ，ベルヌイの式

$$\frac{p}{\rho} = -gz - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left|\nabla\varphi\right|^2 + C(t) \tag{7-1-6}$$

を得る．空間座標による微分を施し水粒子の速度 $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ を求めることが速度ポテンシャル φ の目的であるので，積分定数 $C(t) = 0$ として一般性を失わない．

なお，4-1 節「流体の境界層と境界層理論」に現れたベルヌイの式 (4-1-15b) は，一般式 (7-1-6) においてさらに水平面内 2 次元（重力なし）の定常流（$\partial/\partial t = 0$）という条件を付加した特殊なケースにあたる．

こうして，いったん速度ポテンシャル φ が求まればベルヌイの式から圧力 p が定まるので，海の波（水面重力波）の問題を解くことはスカラー量である唯一の未知関数・速度ポテンシャル φ を求めることに帰着できる．その支配方程式がラプラス方程式 (7-1-5) である．

7-2 境界条件

境界条件は水底および側壁と水面で与えられる．まず，水底および側壁の境界条件を考える．粘性，したがって境界層を無視したので，水粒子は水底・側壁に沿って動くことができる．換言すれば，水底・側壁の境界条件は，水底・側壁において流速の境界に対する垂直（法線）成分が0であること，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \tag{7-2-1}$$

と表現できる．ここに $\boldsymbol{n}$ は水底・側壁の法線ベクトルである．

特に水底の標高を水平面内座標 (x, y) の関数として

$$z = -h(x, y) \tag{7-2-2}$$

と表すと，水底の法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, 1\right) \tag{7-2-2a}$$

と表すことができ，水底の境界条件は，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad z = -h(x, y) \tag{7-2-3}$$

となる．

次に水面の境界条件を考える．水面に存在する水粒子が水面自体を構成するのであるから，水面に存在する水粒子は運動しつつそのまま水面に留まる．したがって，水面の境界条件は，水面

$$z = \zeta(x, y, t) \tag{7-2-4}$$

において，

$$\frac{D\zeta}{Dt} \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{7-2-5}$$

と表現できる．なお，境界条件 (7-2-5) を与える境界 $z = \zeta(x, y, t)$ 自体が動く，という性質が水の表面波の問題を非線形で複雑なものにする．

さらに，水面における水の圧力が大気圧 p_A に等しい，という境界条件が加わる．これは，式 (7-1-6) より

$$\frac{p_A}{\rho} = -g\zeta - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left|\nabla \varphi\right|^2, \quad z = \zeta(x, y, t) \tag{7-2-6}$$

と表すことができる．

7-3　微小振幅波（線形波）

前 2 節で求めた，支配方程式・境界条件はともに非線形性をもつので，その厳密解を得ることは極めて困難である．そこで，波長および水深に比べて振幅がずっと小さいと仮定する**微小振幅波**近似を行い，速度ポテンシャル φ および水位 ζ に関する非線形項を無視する（[36] ～ [39]）．

微小振幅波近似においても支配方程式 (7-1-5) 自体はそのままで，変数 z の定義域の上限を実際の水位 $z=\zeta$ から静水位 $z=0$ に変更するだけである．

$$\nabla^2\varphi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = 0 \qquad (-h \le z \le 0) \tag{7-3-1}$$

水底・側壁の境界条件はそのままである．

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \qquad \text{(7-2-1 再掲)}$$

また，水面での境界条件 (7-2-5,6) はそれぞれ

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (z=0) \tag{7-3-2}$$

$$\frac{p_A}{\rho} = -g\zeta - \frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad (z=0) \tag{7-3-3}$$

となるが，式 (7-3-3) において一般性を失うことなく，$p_A=0$ とおくことができるので，式 (7-3-2,3) から水位

$$\zeta = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{7-3-4}$$

を消去することができ，速度ポテンシャル φ に関する水面の境界条件

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \qquad (z=0) \tag{7-3-5}$$

を得る．

7-4　一定水深の海面を伝わる単色進行波

単一の振動数 ω をもつ波，すなわち単色波を考える．これは，任意の時間波形をもつ波のうち振動数 ω の一つのフーリエ成分を考察することにあたる．そのとき，すべての変数の時間依存性は因子 $e^{-i\omega t}$ で分離できる．

$$\varphi(x,y,z,t) = \phi(x,y,z)e^{-i\omega t} \tag{7-4-1a}$$

$$\boldsymbol{v}(x,y,z,t) = \boldsymbol{u}(x,y,z)e^{-i\omega t} \tag{7-4-1b}$$

$$\zeta(x,y,t)=\eta(x,y)e^{-i\omega t} \tag{7-4-1c}$$

$$p(x,y,z,t)=\tilde{p}(x,y,z)e^{-i\omega t} \tag{7-4-1d}$$

実際の物理量はこれら複素関数の実部である．

単一の振動数 ω をもつ波の式 (7-4-1) を，線形波の支配方程式 (7-3-1) と境界条件 (7-2-3) で $z=-h$: 一定としたもの，および (7-3-2,3,5) で $p_A=0$ とおいたものに代入すると，時間微分 $\partial/\partial t$ を $-i\omega$ で置き換えることができるので，一定水深の海面を伝わる微小振幅波の速度ポテンシャルの振幅 ϕ と水位の振幅 η の満たすべき方程式と境界条件，

$$\nabla^2\phi\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi=0 \qquad (-h\le z\le 0) \tag{7-4-2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \qquad (z=-h) \tag{7-4-3}$$

$$-i\omega\eta=\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad (z=0) \tag{7-4-4}$$

$$0=-g\eta+i\omega\phi \qquad (z=0) \tag{7-4-5}$$

$$-\omega^2\phi+g\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \qquad (z=0) \tag{7-4-6}$$

を得る．

まず，もっとも基本的な波，すなわち x 方向に伝播する，y 方向に一様な平面進行波

$$\eta=Ae^{ikx} \qquad (A\text{：水位の振幅}) \tag{7-4-7}$$

に対応する速度ポテンシャルの振幅 ϕ の解（特解）を求めると，式 (7-4-2,3,4,7) から直ちに

$$\phi=-\frac{igA}{\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}e^{ikx} \tag{7-4-8}$$

を得る（演習問題 7-1）．したがって，速度ポテンシャルの振幅 ϕ と水位 η には

$$\phi=-\frac{ig\eta}{\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \tag{7-4-9}$$

の関係がある．

なお，振動数 ω と波数 k の間には**分散関係式** (dispersion relation)

$$\omega^2=gk\tanh kh \tag{7-4-10}$$

があり互に独立ではない．これから，位相速度 C_p，

$$C_p=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh}=\frac{g}{\omega}\tanh kh \tag{7-4-11}$$

を得る．

7-5　うなり（振幅変調）：振動数の分布をもつ波［複スケール解析］

本節以降，7-5，7-6，7-8節で，海の波の解析における特異摂動法の三方法の応用例を順に説明してゆく．まず本節では複スケール解析の応用例を紹介する．

［音波のうなり］

「二つの時間スケールを導入する」という複スケール解析の手法を初めて耳にしたとき，高校物理で学習した**音波のうなり**という現象を想いうかべた読者も多かったであろう.「ゴォーン」という寺の鐘のうなりの正体は，ほぼ一定の音程（音波の振動数）をもちつつ，その強さ（音波の振幅）がゆっくりと変化している音波である．そのうなりの最も単純なものは，音程の近い二つの音波 y_1, y_2

$$y_1 = A\sin(k_1 x - \omega_1 t) \tag{7-5-1}$$

$$y_2 = A\sin(k_2 x - \omega_2 t) \tag{7-5-2}$$

を合成したもの

$$\begin{aligned} y = y_1 + y_2 &= A\sin(k_1 x - \omega_1 t) + A\sin(k_2 x - \omega_2 t) \\ &= 2A\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \end{aligned} \tag{7-5-3}$$

である．ここで，二つの振動数 ω_1 と ω_2 および二つの波数 k_1 と k_2 がそれぞれ非常に近い値であること

$$\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1 + \omega_2 \cong 2\omega_1, \quad k_1 - k_2 \ll k_1 + k_2 \cong 2k_1 \tag{7-5-4}$$

に注意すると，二つの音波 y_1, y_2 により合成された音波 y の式 (7-5-3) は，

もとの二つの音波の振動数の平均の振動数（周期 τ）

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cong \omega_1 = \frac{2\pi}{\tau} \tag{7-5-5a}$$

および，

もとの二つの音波の波数の平均の波数（波長 λ）

$$\frac{k_1 + k_2}{2} \cong k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{7-5-5b}$$

をもつ進行波

$$\sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \tag{7-5-6a}$$

の振幅

$$2A\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \tag{7-5-6b}$$

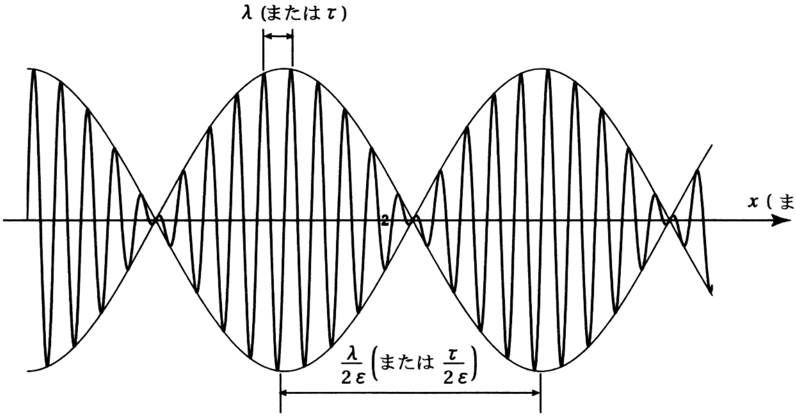


図 7-2　うなり

が，より小さな振動数すなわち長い周期 (τ/ε)

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{2}=O\left(\varepsilon\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)=O(\varepsilon\omega_1)=O\left(\frac{2\pi}{\tau/\varepsilon}\right),\quad \varepsilon\ll 1 \tag{7-5-7a}$$

および，より短い波数すなわち長い波長 (λ/ε)

$$\frac{k_1-k_2}{2}=O\left(\varepsilon\frac{k_1+k_2}{2}\right)=O(\varepsilon k_1)=O\left(\frac{2\pi}{\lambda/\varepsilon}\right),\quad \varepsilon\ll 1 \tag{7-5-7b}$$

でゆっくり変化しているものとみなすことができる (図 7-2)．このとき，振幅の包絡線は

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} \tag{7-5-8}$$

の速さで伝播する．

つまり，音波のうなりは実際に二つの異なる時間スケール (τ および τ/ε) と，二つの異なる長さスケール (λ および λ/ε) をもつ現象なのである．

なお，ラジオの AM (Amplitude Modulation) 放送はこの方法を用いて，すなわち一定の周波数 (振動数) をもつ正弦波の電磁波の振幅を変調させるという方法で信号を送っている．

■ ［海の波の“うなり”］

さて，この振幅変調という現象を水面の重力波に当てはめてみよう．

振動数 ω (それに対応する波数 $k=2\pi/\lambda$) を中心に振動数のスペクトル分布をもつ水面の重力波は，振動数 ω の進行波の振幅 A が波長に比べて長いスケールでゆっくりと変化しているものと見えるはずである．このような，中心の振動数 ω のまわりに振動

数の分布をもつ波を記述する微分方程式に複スケール解析を応用してみよう．

恒例により，通常の時間スケール t に加えて，長い時間スケール

$$t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t, \cdots \tag{6-2-1 再掲}$$

を導入するのと同時に，通常の長さスケール x に加えて，より長い長さスケール

$$x_1 = \varepsilon x, \quad x_2 = \varepsilon^2 x, \cdots \tag{7-5-9}$$

を導入する．

このとき，速度ポテンシャル φ および水位 ζ は，これらのすべての変数の関数であるとみなす．

$$\begin{aligned} &\varphi(x,z,t) \to \varphi(x,x_1,x_2,\ldots;z;t,t_1,t_2,\ldots) \\ &\zeta(x,t) \to \zeta(x,x_1,x_2,\ldots;t,t_1,t_2,\ldots) \end{aligned} \tag{7-5-10}$$

その上で，解 (7-5-10) を，水深一定・単一振動数の進行波の条件の下で求めた解 (7-4-7,8) を基礎とする漸近級数展開

$$\begin{aligned} &\varphi(x,x_1,x_2,\ldots;z;t,t_1,t_2,\ldots) = \left(\psi_0 - i\varepsilon\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\varepsilon^2\psi_2 + \cdots\right)e^{i(kx-\omega t)} \\ &\zeta(x,x_1,x_2,\ldots;t,t_1,t_2,\ldots) = \left(\zeta_0 - i\varepsilon\zeta_1 + (-i\varepsilon)^2\zeta_2 + \cdots\right)e^{i(kx-\omega t)} \end{aligned} \tag{7-5-11a}$$

の形で求める．なお，単なる ε ではなく $-i\varepsilon$ のベキで展開するのは以下で導かれる式の係数を簡略化するためである．ここに振幅

$$\begin{aligned} &\psi_n = \psi_n(x_1,x_2,\ldots;z;t_1,t_2,\ldots) \qquad (n=0,1,2,\ldots) \\ &\zeta_n = \zeta_n(x_1,x_2,\ldots;t_1,t_2,\ldots) \qquad (n=0,1,2,\ldots) \end{aligned} \tag{7-5-11b}$$

は，鉛直座標 z を除いて，時間と長さの長いスケールのみの関数である．

このとき，本来の時間 t による微分は次式で与えられる．x による微分も同様である．

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial t_1}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial t_2}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots \\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2} \to \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_1} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_2}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{6-2-2 再掲}$$

式 (7-5-11a) と式 (6-2-2) をラプラスの式 (7-3-1) に代入し，共通の因子 $\exp i(kx-\omega t)$ で割ると

$$\begin{aligned} &-k^2\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right) \\ &+ 2ik\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right) \\ &+ 2ik\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right) = 0 \qquad \left(-h(x_1,y_1) \le z \le 0\right) \end{aligned} \tag{7-5-12}$$

を得る．式中の ε に関する次数の等しい項をまとめると，

$$-k^2\psi_0 + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2} = 0 \tag{7-5-13}$$

$$-k^2\psi_1 + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} = 2k\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1} \tag{7-5-14}$$

$$-k^2\psi_2 + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2} = 2ik\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial x_1^2} + 2ik\frac{\partial\psi_0}{\partial x_2} \tag{7-5-15}$$

....

と続く漸化式を得る．

また，式 (7-5-11a) と (6-2-2) を水面境界条件 (7-3-5) に代入し，共通の因子 $\exp i(kx-\omega t)$ で割ると，

$$-\omega^2\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right) + g\frac{\partial}{\partial z}\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right)$$

$$-2i\omega\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right)$$

$$-2i\omega\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right) = 0 \qquad (z=0) \tag{7-5-16}$$

を得る．式中の ε に関する次数の等しい項をまとめると，

$$-\omega^2\psi_0 + g\frac{\partial\psi_0}{\partial z} = 0 \qquad (z=0) \tag{7-5-17}$$

$$-\omega^2\psi_1 + g\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = -2\omega\frac{\partial\psi_0}{\partial t_1} \qquad (z=0) \tag{7-5-18}$$

$$-\omega^2\psi_2 + g\frac{\partial\psi_2}{\partial z} = -2\omega\frac{\partial\psi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial t_1^2} - 2i\omega\frac{\partial\psi_0}{\partial t_2} \qquad (z=0) \tag{7-5-19}$$

....

と続く漸化式を得る．

海底での境界条件は

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial z} = \frac{\partial\psi_1}{\partial z} = \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = \cdots = 0 \qquad (z=-h) \tag{7-5-20}$$

である．

まず，ψ_0 について，境界条件 (7-5-17,20) の下で微分方程式 (7-5-13) を解く問題は，7-4 節で解いた問題そのものであるから，その解は (7-4-8) から因子 e^{ikx} を除いたものに等しい．

$$\psi_0 = -\frac{igA}{\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \tag{7-5-21}$$

$$\omega^2 = gk\tanh kh \tag*{(7-4-10 再掲)}$$

ただし，振幅 A は長いスケールの関数である．

$$A = A(x_1, x_2, \ldots; t_1, t_2, \ldots)$$

次に，ψ_0 と ψ_1 に関してグリーン（Green）の公式

$$\int_{-h}^{0} \left[\psi_0 \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - k^2 \psi_1 \right) - \psi_1 \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} - k^2 \psi_0 \right) \right] dz = \left[\psi_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \psi_1 \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right]_{-h}^{0} \tag{7-5-22}$$

を適用する．式 (7-5-22) の左辺に式 (7-5-13,14) を，右辺に式 (7-5-17,18,20) を代入すると，

$$-\frac{\partial A}{\partial x_1} \left[\frac{gk}{\omega \cosh^2 kh} \int_{-h}^{0} \cosh^2 k(z+h) dz \right] = \frac{\partial A}{\partial t_1} \tag{7-5-23}$$

を得る．積分を実行すると

$$\int_{-h}^{0} \cosh^2 k(z+h) dz = \frac{1}{4k} (\sinh 2kh + 2kh) \tag{7-5-24}$$

を得るので，式 (7-5-23) のカッコ [　] 内は分散関係式 (7-4-10) と比較することにより，

$$\frac{gk}{\omega \cosh^2 kh} \int_{-h}^{0} \cosh^2 k(z+h) dz = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) = \frac{d\omega}{dk} \tag{7-5-25}$$

であることがわかる（演習問題 7-2）．結局，式 (7-5-23) は

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0 \tag{7-5-26}$$

と簡略化され，その解は

$$A = A\left(x_1 - \frac{d\omega}{dk} t_1 \right) \tag{7-5-27}$$

という関数形をもつ．この解は**速い振動** $\exp i(kx - \omega t)$（振動数 ω，波長 $2\pi/k$）の振幅 A の包絡線が，その形状を保持したまま速度 $d\omega/dk$ で伝播することを意味する．速度 $d\omega/dk$ は単純な音波のうなり現象を考察した折に導いた，振幅の包絡線が伝播する速さ

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \tag{7-5-8 再掲}$$

を一般化したものである．

ところで，線形波の水面の単位面積あたりの時間平均エネルギー E は振幅 A の 2 乗に比例する（演習問題 7-3）．

$$E \equiv \left\langle \frac{\rho}{2} \int_{-h}^{\xi} (\nabla \varphi)^2 dz + \int_{0}^{\xi} \rho g z dz \right\rangle = \frac{1}{2} \rho g A^2 \tag{7-5-28}$$

ここに〈　〉は 1 周期にわたる平均を表す．それゆえ，スペクトル（振動数の分布）をもつ水面の重力波のエネルギーは速度 $d\omega/dk$ で伝播することがわかる．この事実から，振幅の包絡線すなわち波の群の進む速度という意味でエネルギー伝播速度 $d\omega/dk$ を**群速度** C_g と名づける．

$$C_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) = \frac{1}{2} C_p \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \tag{7-5-29}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t_1}+C_g\frac{\partial A}{\partial x_1}=0 \tag{7-5-26a}$$

$$A=A(x_1-C_g t_1) \tag{7-5-27a}$$

一方，波の位相すなわち情報は位相速度

$$C_p=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh}=\frac{g}{\omega}\tanh kh \tag{7-4-11 再掲}$$

で伝播する．

さて，位相速度 C_p および群速度 C_g の式中にはいずれも kh を変数とする双曲線関数

$$\frac{2kh}{\sinh 2kh}=\frac{4kh}{\exp(2kh)-\exp(-2kh)} \tag{7-5-30a}$$

および

$$\tanh kh=\frac{\exp(kh)-\exp(-kh)}{\exp(kh)+\exp(-kh)} \tag{7-5-30b}$$

が現れる（図 7-3）．ここに，変数 kh は水深 h と波長 $\lambda=2\pi/k$ の比

$$kh=2\pi h/\lambda \tag{7-5-30c}$$

を表す無次元量である．そこで，変数 kh が非常に大きい極限（$kh\to+\infty$：深海あるいは短波）と非常に小さい極限（$kh\to 0+$：浅海あるいは長波）を考察してみよう．

まず，深海（$kh\to+\infty$）では，

$$\tanh kh\sim 1,\quad 2kh/\sinh 2kh=o(1)\qquad kh\to+\infty \tag{7-5-31a}$$

であるから，式 (7-4-11),(7-5-29) はそれぞれ

$$C_p=\frac{\omega}{k}=\frac{g}{\omega}\tanh kh\sim\frac{g}{\omega}=\frac{g}{2\pi}T\qquad kh\to+\infty \tag{7-5-31b}$$

$$C_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{1}{2}C_p\left(1+\frac{2kh}{\sinh 2kh}\right)\sim\frac{1}{2}C_p\qquad kh\to+\infty \tag{7-5-31c}$$

となる．すなわち，深海では群速度 C_g は位相速度 C_p の半分であり，いずれも周期 T に比例する．台風が生れるような南洋の強風下の海面で発生する風波は周期（振動数）に関するスペクトルを持っているが，そのうち周期の長い成分が先行して伝播する．また，周期の短い成分ほどエネルギーの減衰率が大きいので，日本沿岸までやってくるいわゆる土用波はこの周期の長い成分にあたる．

なお，$kh=3$ 程度，すなわち水深 h が波長 $\lambda=2\pi/k$ の半分程度以上になればすでに深海の極限（$kh\to+\infty$）における双曲線関数の近似 (7-5-31a,b) を十分満足していることは注目すべきである（図 7-3）．

一方，浅海（$kh\to 0+$）では

$$\tanh kh\sim kh,\quad 2kh/\sinh 2kh\sim 1\qquad kh\to 0+ \tag{7-5-32a}$$

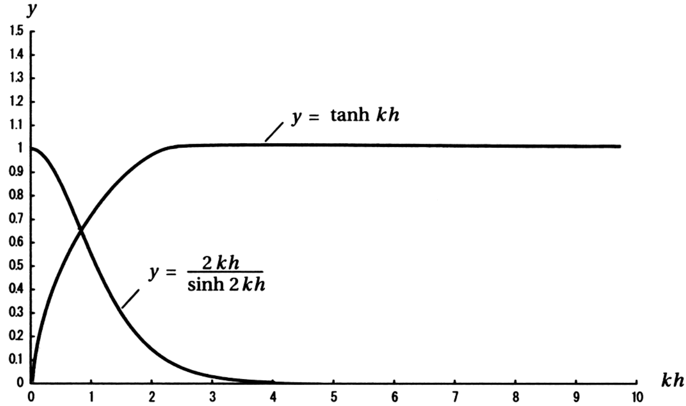


図 7-3　水深波長比 kh と双曲線関数

であるから，式 (7-4-11),(7-5-29) はそれぞれ

$$C_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh} \sim \sqrt{gh} \qquad kh \to 0+ \tag{7-5-32b}$$

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}C_p\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) \sim C_p \qquad kh \to 0+ \tag{7-5-32c}$$

となる．すなわち，浅海では群速度 C_g と位相速度 C_p は等しく，水深の平方根に比例し周期 T に依存しない（図 7-4 も参照）．

複スケール解析は，この例のような物理的に複数のスケールを導入することが自然である問題に関してはことさら自然でかつ有効な手法である．なお，本節ではグリーンの公式 (7-5-22) が「高次項が定義域全体にわたり一様に成立する解を有する」というという条件に相当する（6-7 節参照）．

7-6　ゆるやかに変化する海底の上を進む単色波 ［WKB 法問題］

本節では WKB 法の応用例として，もともと単色平面波

$$\zeta(x, y, t) = A \exp i(k_x x + k_y y - \omega t)$$

であった波が海底水深がゆるやかに変化するのに従い，その進行方向と振幅を変化させてゆく現象を解析する．

水深がゆるやかにすなわち波長に比べて長いスケールで変化している場合

$$\varepsilon \equiv \lambda \frac{|\nabla h|}{h} \ll 1 \tag{7-6-1}$$

には，この物理現象を解析するために，波長 λ と水深の変化する長い長さスケール λ/ε の二つの長さスケールを導入することが当を得ている．そして，水深が一定であると

いう条件の下で求めた解 (7-4-8) の中に現れる振幅 A が，波長に比べて長いスケールでゆっくりと変化する近似解が得られることを期待できる．

まず，時間および長さの長いスケール

$$t_1 = \varepsilon t, \quad x_1 = \varepsilon x, \quad y_1 = \varepsilon y \tag{7-6-2}$$

を導入し，これらを WKB 法による漸近級数展開式の基本変数とする．すなわち，5-2 節の変数 x にあたるものである．

このとき，線形波の支配方程式 (7-3-1) および境界条件 (7-3-5),(7-2-3) はそれぞれ

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)\varphi+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi=0 \qquad \left(-h(x_1,y_1)\le z\le 0\right) \tag{7-6-3}$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_1^2}+g\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \qquad (z=0) \tag{7-6-4}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\varepsilon^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial h}{\partial y_1}\right) \qquad \left(z=-h(x_1,y_1)\right) \tag{7-6-5}$$

となる．

支配方程式 (7-6-3) は 5 章 WKB 法で取り扱った微分方程式の典型的なものである．それゆえ，WKB 法の基本解 (5-2-6,7) にならうならば，速度ポテンシャル $\varphi(x_1,y_1,z,t_1)$ を

$$\varphi(x_1,y_1,z,t_1)\sim\exp\left(iQ(x_1,y_1,z,t_1)/\varepsilon\right) \qquad \varepsilon\to 0+ \tag{7-6-6a}$$

$$Q(x_1,y_1,z,t_1)/\varepsilon\sim\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k Q_k(x_1,y_1,z,t_1) \qquad \varepsilon\to 0+$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}Q_0(x_1,y_1,t_1)+Q_1(x_1,y_1,z,t_1)+\varepsilon Q_2(x_1,y_1,z,t_1)+\cdots \tag{7-6-6b}$$

という漸近級数解として求めることになる．しかし，第 5 章の常微分方程式とは異なり，本問題では変数が x_1,y_1,z,t_1 と四つ存在し，そのうちの鉛直座標 z は一つのスケールしか存在しない．また，式 (7-6-6b) の第 1 項 $iQ_0(x_1,y_1,t_1)/\varepsilon$ は，一定水深の海面を進む単色波の位相の部分，すなわち，$i(k_x x+k_y y-\omega t)$ に対応する短い時間と長さスケールの関数であり，短いスケール (z/ε) のない鉛直座標 z には依存しない，という特殊性がある．

そこで，基本的に進行波の形を維持しつつ振幅と位相が変化するという物理的描像を重視するために，前節で採用した速度ポテンシャル φ の漸近級数展開式 (7-5-11a) を WKB 法問題に即して次のように一般化し，複スケール解析により解くことにする．

すなわち，式 (7-6-6a) 右辺の指数関数の肩にのっている

$$iQ(x_1,y_1,z,t_1)/\varepsilon$$

を展開した項 (7-7-6b) のうち，短いスケールの変数 $x_1/\varepsilon, y_1/\varepsilon, t_1/\varepsilon$ に依存する第 1 項 $iQ_0(x_1,y_1,t_1)/\varepsilon$ のみを残し，第 2 項以下の項を肩にのせた指数関数をベキ級数展開し，

$$\exp i\left(Q_1(x_1,y_1,z,t_1)+\varepsilon Q_2(x_1,y_1,z,t_1)+\cdots\right)=\psi_0+(-i\varepsilon)\psi_1+(-i\varepsilon)^2\psi_2+\cdots$$

の型の漸近級数展開式を導入する．その結果，速度ポテンシャル φ は

$$\varphi=\left(\psi_0+(-i\varepsilon)\psi_1+(-i\varepsilon)^2\psi_2+\cdots\right)\exp(iQ_0/\varepsilon) \tag{7-6-7}$$

と表すことができる．ここに，$\psi_k=\psi_k(x_1,y_1,z,t_1)\ (k=0,1,2,\ldots)$ は，鉛直座標 z を除いて長い時間と長さスケールのみの関数である．また，$iQ_0(x_1,y_1,t_1)/\varepsilon$ は一定水深の海面を進む単色波の位相 $i(k_x x+k_y y-\omega t)$ に対応する時間と長さの短いスケールの関数であるから，水深の変化に従いゆるやかに変化する波数ベクトル $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y)$ を，位相の長い長さスケールによる勾配

$$\boldsymbol{k}=(k_x,k_y)=\left(\frac{\partial Q_0}{\partial x_1},\frac{\partial Q_0}{\partial y_1}\right) \tag{7-6-8a}$$

と，また，ゆるやかに変化する振動数 ω を位相の長い時間スケールによる微分にマイナス (−) を付したもの

$$\omega=-\frac{\partial Q_0}{\partial t_1} \tag{7-6-8b}$$

と定義することができ，これらを用いると以下の諸式を簡潔に表すことができる．

式 (7-6-8a,b) から直ちに

$$\frac{\partial k_x}{\partial t_1}+\frac{\partial \omega}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial k_y}{\partial t_1}+\frac{\partial \omega}{\partial y_1}=0 \tag{7-6-8c}$$

を得る

さて，式 (7-6-7) を式 (7-6-3) に代入し共通の因子 $\exp\left(iQ_0(x_1,y_1,t_1)/\varepsilon\right)$ で割ると，

$$\begin{aligned}
&-\left(\psi_0+(-i\varepsilon)\psi_1+(-i\varepsilon)^2\psi_2+\cdots\right)\left[\left(\frac{\partial Q_0}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial Q_0}{\partial y_1}\right)^2\right]\\
&+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\psi_0+(-i\varepsilon)\psi_1+(-i\varepsilon)^2\psi_2+\cdots\right)\\
&+2i\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\psi_0+(-i\varepsilon)\psi_1+(-i\varepsilon)^2\psi_2+\cdots\right)\frac{\partial Q_0}{\partial x_1}\\
&+2i\varepsilon\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\psi_0+(-i\varepsilon)\psi_1+(-i\varepsilon)^2\psi_2+\cdots\right)\frac{\partial Q_0}{\partial y_1}\\
&+i\varepsilon\left(\psi_0+(-i\varepsilon)\psi_1+(-i\varepsilon)^2\psi_2+\cdots\right)\left(\frac{\partial^2 Q_0}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 Q_0}{\partial y_1^2}\right)\\
&+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)\left(\psi_0+(-i\varepsilon)\psi_1+(-i\varepsilon)^2\psi_2+\cdots\right)=0\qquad\left(-h(x_1,y_1)\le z\le 0\right)
\end{aligned} \tag{7-6-9}$$

を得る．式中の ε に関する次数の等しい項をまとめ式 (7-6-8a,b) の波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$ と振動数 ω を用いると，

$$-k^2\psi_0 + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2} = 0 \qquad \left(-h(x_1, y_1) \leq z \leq 0\right) \tag{7-6-10a}$$

$$-k^2\psi_1 + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} = 2\left(k_x\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1} + k_y\frac{\partial\psi_0}{\partial y_1}\right) + \psi_0\left(\frac{\partial k_x}{\partial x_1} + \frac{\partial k_y}{\partial y_1}\right) \qquad \left(-h(x_1, y_1) \leq z \leq 0\right) \tag{7-6-10b}$$

…………

と続く漸化式を得る．

また，式 (7-6-7) を水面境界条件 (7-6-4) に代入し共通の因子 $\exp\left(iQ_0(x_1, y_1, t_1)/\varepsilon\right)$ で割ると，

$$\begin{aligned}
&-\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right)\left(\frac{\partial Q_0}{\partial t_1}\right)^2 + g\frac{\partial}{\partial z}\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right)\\
&+2i\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right)\frac{\partial Q_0}{\partial t_1}\\
&+i\varepsilon\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right)\frac{\partial^2 Q_0}{\partial t_1^2}\\
&+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right) = 0 \qquad (z = 0)
\end{aligned} \tag{7-6-11}$$

を得る．式中の ε に関する次数の等しい項をまとめ式 (7-6-8a,b) の波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$ と振動数 ω を用いると，

$$-\omega^2\psi_0 + g\frac{\partial\psi_0}{\partial z} = 0 \qquad (z = 0) \tag{7-6-12a}$$

$$-\omega^2\psi_1 + g\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = -2\omega\frac{\partial\psi_0}{\partial t_1} - \psi_0\frac{\partial\omega}{\partial t_1} \qquad (z = 0) \tag{7-6-12b}$$

…………

と続く漸化式を得る．

最後に，式 (7-6-7) を海底境界条件 (7-6-5) に代入し共通の因子 $\exp\left(iQ_0(x_1, y_1, t_1)/\varepsilon\right)$ で割ると，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right)\\
&= -i\varepsilon\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right)\left(\frac{\partial Q_0}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_0}{\partial y_1}\frac{\partial h}{\partial y_1}\right)\\
&\quad+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right)\frac{\partial h}{\partial x_1}\\
&\quad+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\psi_0 + (-i\varepsilon)\psi_1 + (-i\varepsilon)^2\psi_2 + \cdots\right)\frac{\partial h}{\partial y_1}
\end{aligned} \tag{7-6-13}$$

を得る．式中の ε に関する次数の等しい項をまとめ式 (7-6-8a,b) の波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$ と振動数 ω を用いると，

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial z} = 0 \qquad \left(z = -h(x_1, y_1)\right) \tag{7-6-14a}$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \psi_0 \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x_1} + k_y \frac{\partial h}{\partial y_1}\right) \qquad \left(z = -h(x_1, y_1)\right) \tag{7-6-14b}$$

…………

と続く漸化式を得る．

まず，式 (7-6-7) の展開における初項 ψ_0 について，境界条件 (7-6-12a, 14a) の下で微分方程式 (7-6-10a) を解く問題，すなわち摂動項を含まない（$O(\varepsilon^0)$）問題は 7-5 節で解いた問題そのものであるから，その解は

$$\psi_0 = -\frac{igA}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \tag{7-5-21 再掲}$$

$$\omega^2 = gk \tanh kh \tag{7-4-10 再掲}$$

に等しい．ただし，振幅

$$A = A(x_1, y_1, t_1) \tag{7-6-15}$$

および波数 k (7-6-8a)，振動数 ω (7-6-8b) は長いスケールの関数である．

ここで ψ_0 と ψ_1 に関してグリーンの公式

$$\int_{-h}^{0} \left[\psi_0 \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - k^2 \psi_1\right) - \psi_1 \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} - k^2 \psi_0\right)\right] dz = \left[\psi_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \psi_1 \frac{\partial \psi_0}{\partial z}\right]_{-h}^{0} \tag{7-5-22 再掲}$$

を適用する．式 (7-5-22) の左辺に式 (7-6-10a,b) を，右辺に式 (7-6-12a,b,14a,b) をそれぞれ代入すると，

$$\begin{aligned} &\int_{-h}^{0} \left[2\psi_0 \left(k_x \frac{\partial \psi_0}{\partial x_1} + k_y \frac{\partial \psi_0}{\partial y_1}\right) + \psi_0^2 \left(\frac{\partial k_x}{\partial x_1} + \frac{\partial k_y}{\partial y_1}\right)\right] dz \\ &= -\frac{1}{g} \left[2\omega \psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial t_1} + \psi_0^2 \frac{\partial \omega}{\partial t_1}\right]_{z=0} - \left[\psi_0^2\right]_{z=-h} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x_1} + k_y \frac{\partial h}{\partial y_1}\right) \end{aligned} \tag{7-6-16}$$

を得る．さらに式 (7-6-16) の右辺第 2 項と左辺を組み合わせると，ライプニッツの公式により式 (7-6-16) は

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{0} k_x \psi_0^2 dz + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{-h}^{0} k_y \psi_0^2 dz + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t_1} \left[\psi_0^2 \omega\right]_{z=0} = 0 \tag{7-6-17}$$

となる．

式 (7-6-17) に式 (7-4-10),(7-5-20) を代入して積分を実行すると

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{E}{\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(C_{gx} \frac{E}{\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(C_{gy} \frac{E}{\omega}\right) = 0 \tag{7-6-18}$$

を得る（演習問題 7-4）．ここに，E は水面の単位面積あたりの波の時間平均エネルギー

$$E = \frac{1}{2}\rho g A^2 \qquad \text{(7-5-28 再掲)}$$

であり，(C_{gx}, C_{gy}) は群速度ベクトル $\boldsymbol{C_g}$ の (x, y) 成分である．

$$\boldsymbol{C_g} = (C_{gx}, C_{gy}) = (k_x, k_y)\frac{C_g}{k} \qquad \text{(7-6-19)}$$

E/ω はプランク定数（第 5 章）と同じ作用の次元をもち，「波動の作用（wave action）」と呼ばれる．式 (7-6-18) は波動の作用が群速度で運ばれることを示す保存則である．

［定常波］

以下では定常波 $(\partial/\partial t_1 = 0)$ を考える．

このとき，式 (7-6-8c) より，

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y_1} = 0 \qquad \text{(7-6-20)}$$

を得る．すなわち，水深が変化する海底の上を進行する定常波の振動数は変化しない．

$$\omega = \text{一定} \qquad \text{(7-6-21)}$$

したがって，式 (7-6-18) は，

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(C_{gx}E) + \frac{\partial}{\partial y_1}(C_{gy}E) = 0 \qquad \text{(7-6-22)}$$

と単純化できる．

すなわち，振動数のスペクトル分布をもつ波のエネルギーが群速度

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\frac{\omega}{k}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) = \frac{1}{2}C_p\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) \qquad \text{(7-5-29 再掲)}$$

で伝播することが示された（7-5 節）のに続き，本節で，「単一の振動数をもつ波（単色波）のエネルギーも，ゆるやかに変化する海底の上を群速度で伝播する」ことが明らかになった．

なお，分散関係式 (7-4-10) において $\omega =$ 一定 とおくと水深 h の関数として波数 k（波長 λ），位相速度 C_p，群速度 C_g が定まる．図 7-4 は周期 15 秒の波が水深約 200 m の沖合いから海岸に向かい侵入するときの波長 $\lambda/10$ [m]，位相速度 C_p [m/s]，群速度 C_g[m/s] を示す．波長 λ とそれに比例する位相速度 C_p は海底が浅くなるに従い単調に減少するが，群速度 C_g はいったん増加した後位相速度 C_p に漸近しつつ減少する．

式 (7-6-22) を用いて，ゆるやかに変化する海底の上を進む波の径路，すなわち**波向線**を描くことができる．波動力学では本節の解析を波速の変化に伴う**屈折**のみによる（波の回折を無視する）波の変形を取り扱う**幾何光学近似**と呼ぶ．

本節の解析では式 (7-6-18 ないし 22) により式 (7-6-7) の展開における初項

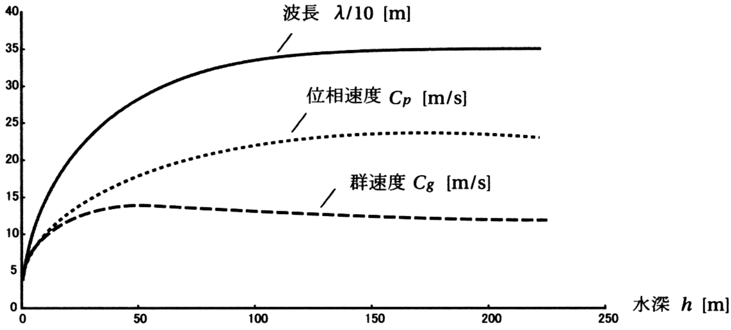


図 7-4　水深変化に伴う波長，位相速度，群速度の変化（周期 15 s）

$$\psi_0 = -\frac{igA}{\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \qquad \text{(7-5-21 再掲)}$$

の長いスケール (x_1, y_1, t_1) 依存性まで求めている．WKB 法の一般論（5-2 節）において，漸近級数の第 1 項 $\frac{1}{\varepsilon}Q_0(x_1, y_1, t_1)$ のみを残す近似を**幾何光学近似**と名づけたのはこの波動力学のアナロジーによる．なお，5-2 節で WKB 法が有効であるためには一般に第 2 項までとる（物理光学近似）必要があることを強調したが，第 2 項がほぼ定数である（回折の効果が無視できる）ケースでは幾何光学近似が有効になる．

■［波向線の作図と波高の計算］

海岸工学では，以下の手順により所要地点の波高を得る．

沖合の，入射波の波向に垂直な線（波峰線）上にいくつかの出発点 (L_0, M_0, N_0, O_0) を等間隔に設定する（図 7-5）．それぞれの出発点から各点で定義される**波向（波数）ベクトル** $\boldsymbol{k}$ に接する軌跡（波向線 L, M, N, O）を描く．解析的にこれを実施するためには式 (7-6-7) の位相 Q_0 について解く必要があるが，実用的には屈折に関するスネルの法則（Snell's law）

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_i}{c_r} \qquad \text{(7-6-23)}$$

を用いて順々に波向線を伸ばし作図してゆくことができる．ここに i は入射角，r は屈折角，c_i は入射側の位相速度，c_r は屈折側の位相速度である（図 7-6）．

図 7-5 において，近接する（間隔が微小である）波向線 M と N に直交する（位相 $Q =$ 一定の）二つの波峰線上にそれぞれ 2 点 M1, N1 と M2, N2 をとる．閉曲線 N1, N2, M2, M1, N1 の囲む領域にわたり微分方程式 (7-6-22) を積分すると，ガウス（Gauss）の発散定理（[7]）により，沖側 M1, N1 の積分と陸側 M2, N2 の積分は等しい．

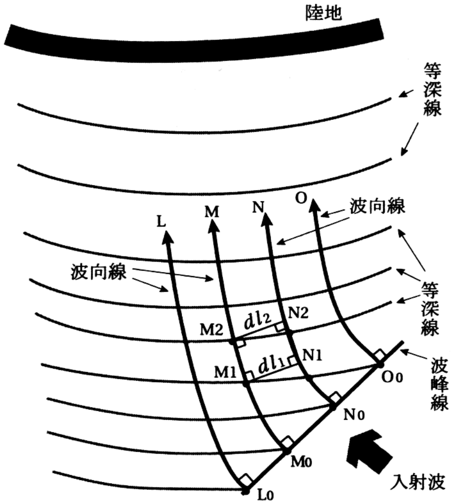


図 7-5 波向線の作図

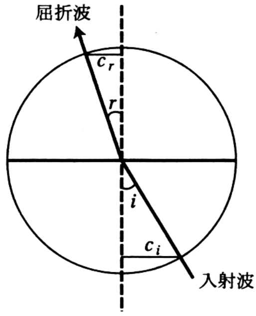


図 7-6 スネルの法則

$$[C_g E dl]_1 = [C_g E dl]_2 = 一定 \tag{7-6-24}$$

それゆえ，いったん波向線を作図することができると，沖合の近接する 2 点（出発点）で計算された $[C_g E dl]_1$ の値は，その 2 点を出発点としてそれぞれ描かれた二つの波向線に沿って一定であるから，当該地点の水深から群速度 C_g を算出し，同時に近接する波向線の波峰線に沿う間隔 dl を読み取ることにより，その地点の単位水面あたりの波の全エネルギー E，そして式 (7-5-28) から波の振幅 A を求めることができる．

この手順により，沖合の波浪記録（波向と振幅）を境界条件として与えると，その波浪が沿岸に達したときの波向と振幅を求めることができる．図 7-7 は茨城県鹿島灘に南東方向から入射した波浪が海底水深の変化により屈折する様子（屈折図）を示す．沖合いで等間隔に引かれた波向線の間隔が波の伝播とともに広がった地点では波高が小さく，逆に間隔が狭まった地点では波高が大きくなる．

7-7 港湾・海岸の線形長波

特異摂動法による海の波の解析の三番目の応用例を次節で解説する準備として，本節では港湾・海岸における**線形長波**の理論を概説する．

港湾を建設する際にはそれに先立ち，その計画通り防波堤を設置した場合に荷役作業などに必須となる港湾内の静穏度（波の静かさ）が十分に保たれるか否かを確かめて

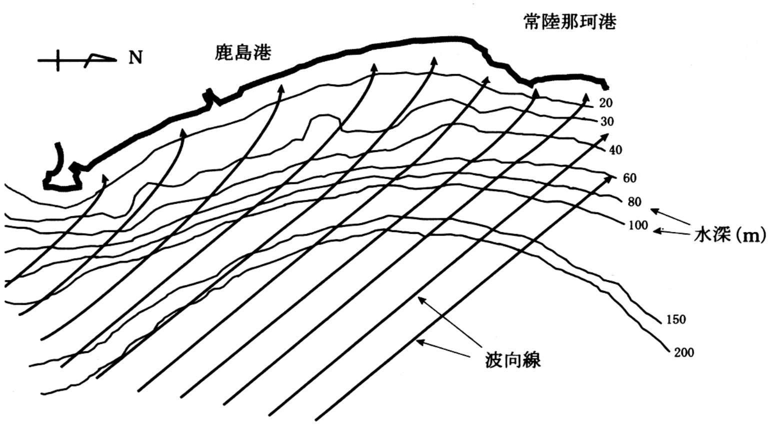


図 7-7　鹿島灘における波浪屈折図（沖波：周期 10 s，方向南東）

おく必要が生ずる．

この場合問題とすべき波浪は一般に港湾の水深より十分長い波長をもつ．この水深より十分長い波長をもつ波（$kh \to 0+$）を**長波**と呼ぶ．長い波長という観点からは津波はその典型であるが，三陸海岸など津波常襲地域を除く海域では港湾建設時に津波の来襲まで考慮することはない．

また，戦後ダム建設が進み河川の上流から土砂の供給が絶たれたために全国的に海岸の侵食が深刻化しているが，海浜の土砂の長期にわたる輸送機構に寄与するのも長波である．

さて，7-4 節で得た一定水深の線形波の速度ポテンシャルの振幅 ϕ の解

$$\phi = -\frac{igA}{\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}e^{ikx} \tag{7-4-8 再掲}$$

より，速度の鉛直成分は

$$w = \frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{igkA}{\omega}\frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh}e^{ikx} \tag{7-7-1}$$

であるから，長波の極限

$$\frac{2\pi h}{\lambda} = kh \to 0+ \tag{7-7-2}$$

では，

$$\sinh k(z+h) \leq \sinh kh \to 0+ \tag{7-7-3}$$

すなわち，

$$w \to 0, \quad kh \to 0+ \tag{7-7-4}$$

となり，水粒子の運動は実質的に (x, y) 水平面内に限定される．

$$\boldsymbol{v}(x,y,z,t)=\big(u(x,y,z,t),v(x,y,z,t),w(x,y,z,t)\big)$$

$$\to\big(u(x,y,t),v(x,y,t),0\big)\qquad kh\to 0+ \tag{7-7-5}$$

粘性を無視し線形近似したナヴィエ-ストークス方程式 (7-1-1) の圧力に静水圧近似

$$p=\rho g(\zeta - z) \tag{7-7-6a}$$

を施すと，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-g\frac{\partial \varsigma}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial t}=-g\frac{\partial \varsigma}{\partial y} \tag{7-7-6b}$$

を得る．また，連続の式 (7-1-2) $(w=0)$ を水深にわたり積分すると，

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}+\frac{\partial hv}{\partial y}=0 \tag{7-7-7}$$

を得る（演習問題 7-5）．

式 (7-7-6b,7) から流速 (u,v) を消去すると長波の支配方程式，すなわち水位 ζ に関する微分方程式

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-g\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\right)=0 \tag{7-7-8}$$

を得る．

側壁における境界条件は

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \boldsymbol{n}}=0 \tag{7-7-9}$$

である．ここに $\boldsymbol{n}$ は側壁の法線方向を示す．

さらに，港湾内のような一定水深の海域では式 (7-7-8) を

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-gh\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)=0 \tag{7-7-10}$$

と簡略化できる．

ここで，7-4 節と同様に，単一の振動数 ω をもつ波・単色波

$$\zeta(x,y,t)=\eta(x,y)e^{-i\omega t} \tag{7-4-1c 再掲}$$

を考えると，式 (7-7-10) は，水位 ζ の平面座標に依存する振幅 $\eta(x,y)$ に関するヘルムホルツ方程式

$$\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)+k^2\eta=0 \tag{7-7-11}$$

となる．ここに，長波の分散関係式

$$\omega^2=ghk^2 \tag{7-7-12}$$

を用いた．これは分散関係式 (7-4-10) において長波の極限 $kh\to 0+$ をとったものである．

次節の例題において，$\eta(x,y)$ に関する微分方程式 (7-7-11) が一定水深の海域における長波の基礎方程式となる．

7-8　細長い矩形水路で共鳴する長波：開口端補正 ［漸近接続］

本節では，境界層理論の指導原理である**漸近接続**により比較的単純ではあるがノントリヴィアルな形状の港湾に共鳴する長波の問題の近似解を求める．漸近接続は以下のステップをふむ非常に応用範囲の広い汎用的手法である．

A)　独立変数の全定義域にわたる厳密解を一挙に得ることができない場合，独立変数の定義域を**外域と内域**に分割し，微分方程式の**外極限**と**内極限**をとる．これは境界層理論の場合には，境界層の外と内に対応する．

B)　微分方程式の外極限と内極限について，それぞれ厳密解（解析解）を得る．

C)　二つの解を**外域と内域が“重なる”領域**で漸近接続し，全定義域にわたる統一近似解を得る．

具体的には，一定水深の海域において x 軸の正の方向から直線状の完全反射防波堤に垂直に入射する波数 k，振幅 A の長波 η_I

$$\eta_I = Ae^{-ikx} \tag{7-8-1}$$

が，防波堤の狭い開口部から細長い矩形水路に侵入し，共鳴する現象を考察する（図7-8）．

狭い開口部とは「考察する波の波長 $\lambda = 2\pi/k$ に比べて十分小さい開口幅 $2\varepsilon\lambda$」を意味する．なお，矩形水路の長さ l は波長 λ と同程度あるいはそれ以上であるとする（$l = O(\lambda)$）．

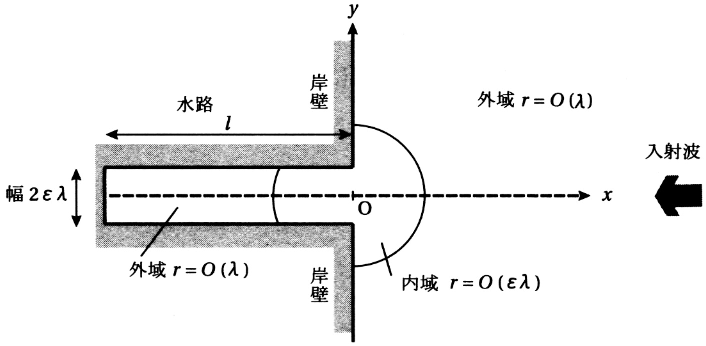


図7-8　細長い矩形水路に進入する長波，外域と内域

この問題には二つの異なる長さスケール λ と $\varepsilon\lambda$ が現れている．そこで，開口部の中心を座標原点とし，原点からの距離 r にもとづき海域全体を**外域**（$r=O(\lambda)$）と**内域**（$r=O(\varepsilon\lambda)$）に分割し，それぞれにおける解を求めそれらの解の漸近接続を行う．

■［外域］

矩形水路内部（$x<0$）と外洋（$x>0$）の二つの外域（$r=O(\lambda)$）における長さスケールは λ であるから，ヘルムホルツ方程式 (7-7-11) の各項

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2},\quad k^2\eta=O(\eta/\lambda^2) \tag{7-8-2}$$

は同じオーダーであり，いずれも無視できない．

まず，矩形水路内部を考察する．矩形水路内部における式 (7-7-11) の一般解は，

$$\eta_{o-}=C_1e^{-ikx}+C_2e^{ikx}\qquad (x<0) \tag{7-8-3}$$

である．これに水路端での完全反射の境界条件

$$\frac{\partial\eta_{o-}}{\partial x}=0\qquad (x=-l) \tag{7-8-4}$$

を課すと

$$C_1=\frac{1}{2}Be^{-ikl},\quad C_2=\frac{1}{2}Be^{ikl} \tag{7-8-5}$$

とおくことができ，式 (7-8-3) は

$$\eta_{o-}=B\cos k(x+l)\qquad (x<0) \tag{7-8-6}$$

と簡略化できる．ここに B は積分定数である．

次に，外洋側 ($x>0$) を考察する．

極座標 (r,θ) を採用すると，2 次元のラプラシアン $\Delta\eta$ は

$$\Delta\eta\equiv\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\eta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\theta^2} \tag{7-8-7}$$

と表されるので，ヘルムホルツ方程式 (7-7-11) は

$$(kr)^2\frac{\partial^2\eta}{\partial(kr)^2}+kr\frac{\partial\eta}{\partial(kr)}+\frac{\partial^2\eta}{\partial\theta^2}+(kr)^2\eta=0 \tag{7-8-8}$$

となる．その解は変数分離法

$$\eta=R(kr)\Theta(\theta) \tag{7-8-9}$$

により求めることができる．すなわち，解 (7-8-9) を式 (7-8-8) に代入すると，

$$(kr)^2\frac{\partial^2R(kr)}{\partial(kr)^2}+kr\frac{\partial R(kr)}{\partial(kr)}+\left[(kr)^2-D\right]R(kr)=0 \tag{7-8-10a}$$

$$\Theta''(\theta)+D\Theta(\theta)=0 \tag{7-8-10b}$$

を得る．ここに D は定数である．

微分方程式 (7-8-10b) の解は 2π を周期としなければならないので $D=n^2$ となり，一般解は

$$\Theta(\theta)=C_n\cos n\theta+S_n\sin n\theta \qquad (n：0\text{ または自然数}) \tag{7-8-11}$$

である．ここに C_n, S_n は積分定数である．

(7-8-10a) はベッセルの微分方程式であり（巻末付録 式 (A1-1)），その一般解は n 次のベッセル関数の 1 次結合である．ここでは無限遠 $(r\to+\infty)$ での境界条件を課す際の便宜上，第 3 種ベッセル関数すなわちハンケル (Hankel) 関数を用いる．

$$R(kr)=A_n^{(1)}H_n^{(1)}(kr)+A_n^{(2)}H_n^{(2)}(kr) \tag{7-8-12}$$

ここに，$H_n^{(1)}(kr)$ は n 次の第 1 種ハンケル関数，$H_n^{(2)}(kr)$ は n 次の第 2 種ハンケル関数である．$A_n^{(1)}, A_n^{(2)}$ は積分定数である．

これらを総合して，ヘルムホルツ方程式 (7-8-8) の一般解

$$\eta=\sum_{n=0}^{\infty}H_n^{(1)}(kr)\left(C_n^{(1)}\cos n\theta+S_n^{(1)}\sin n\theta\right)+\sum_{n=0}^{\infty}H_n^{(2)}(kr)\left(C_n^{(2)}\cos n\theta+S_n^{(2)}\sin n\theta\right) \tag{7-8-13}$$

を得る．$C_n^{(1)}, S_n^{(1)}, C_n^{(2)}, S_n^{(2)}$ は積分定数である．

さて，水位の振幅 η のうち，開口幅の小さな港口による散乱波 η_S は，無限遠 $(r\to+\infty)$ での放射条件「外向きに出てゆく波のみになる」を満たさねばならない．

先に断ったように，ベッセルの微分方程式の解としてハンケル関数を選んだのは，第 1 種ハンケル関数 $H_\nu^{(1)}(kr)$ が無限遠 $(r\to+\infty)$ での放射条件「外向きに出てゆく波のみになる」を満たす

$$H_\nu^{(1)}(kr)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\exp[i(kr-\nu\pi/2-\pi/4)] \qquad r\to+\infty \tag{A1-13a}$$

一方，第 2 種ハンケル関数は逆に無限遠で内向きに入射する波を表す

$$H_\nu^{(2)}(kr)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\exp[-i(kr-\nu\pi/2-\pi/4)] \qquad r\to+\infty \tag{A1-13b}$$

からである．それゆえ，第 2 種ハンケル関数の係数はすべて 0 でなければならない．

$$C_n^{(2)}=0,\quad S_n^{(2)}=0 \qquad (n:0\text{ または自然数}) \tag{7-8-14}$$

さらに防波堤での完全反射の条件

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}_{x=0}=\left[\cos\theta\frac{\partial\eta}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right]_{\theta=\pm\pi/2}=0 \tag{7-8-15}$$

を課すと，港口による散乱波 η_S の最も一般的な解は，

$$\eta_S=\sum_{n=0}^{\infty}\left[H_{2n}^{(1)}(kr)C_{2n}^{(1)}\cos 2n\theta+H_{2n+1}^{(1)}(kr)S_{2n+1}^{(1)}\sin(2n+1)\theta\right] \tag{7-8-16}$$

となる．

外洋における式 (7-8-8) の解は，こうして導いた散乱波 η_S(7-8-16) に入射波 η_I (7-8-1) および直線状の完全反射防波堤による反射波

$$\eta_R = Ae^{+ikx} \tag{7-8-17}$$

を加えたものとなる．

$$\eta_{o+} = (\eta_I + \eta_R) + \eta_S = 2A\cos kx + \eta_S \tag{7-8-18}$$

■［内域］

内域（$r = O(\varepsilon\lambda)$）での長さスケールは $\varepsilon\lambda$ であるから，ヘルムホルツ方程式 (7-7-11) の各項

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = O\left(\eta/(\varepsilon\lambda)^2\right) \gg k^2\eta = O\left(\eta/\lambda^2\right)$$

のうち，$k^2\eta$ は他の 2 項に比べて無視できる．したがって，水位の振幅 $\eta_i(x,y)$ の支配方程式 (7-7-11) はラプラス方程式

$$\frac{\partial^2\eta_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta_i}{\partial y^2} = 0 \tag{7-8-19}$$

に帰着する．

しかし，図 7-8 の内域部分のような複雑な形状をもつ側壁の境界条件 (7-7-9) を満足するラプラス方程式 (7-8-19) の解 $\eta_i(x,y)$ を求めることは容易でない．

そこで，**複素ポテンシャルの等角写像法**を用いることになるが，その解法の詳細を述べることは本書の趣旨から外れるので節末の［複素ポテンシャルの等角写像法］に回し，その結果を以下にまとめておく．

複素変数

$$z = x + jy \tag{7-8-20}$$

の複素解析関数である（速度ポテンシャルを実部，流れ関数 (4-1-20) を虚部とする）**複素ポテンシャル** $\Phi(z)$ の実部が，係数を除き水位の振幅

$$\eta_i(x,y) = \mathrm{Re}\,\Phi(z) \tag{7-8-21}$$

に等しい．なお，複素平面 z および w の虚数単位を j と表記する[*1]．

変数変換

*1 本節では鉛直座標 z が現れないので，変数 z はもっぱら複素変数 $x+jy$ を表す．なお，j は複素平面 $x+jy$ の虚数単位であり，複素関数 $\Phi(z)$ の虚数単位 i と区別する．

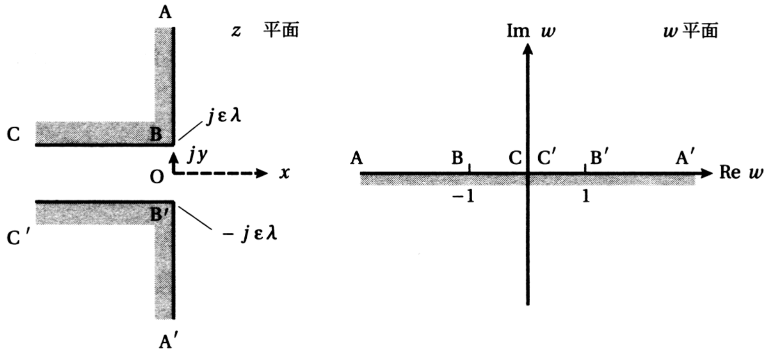


図7-9　シュバルツ-クリストッフェル変換による z 平面から w 平面への写像

$$z = x + jy = \frac{2\varepsilon\lambda}{\pi}\left[-j\sqrt{w^2-1} + \log\frac{w}{\sqrt{w^2-1}+j}\right] \tag{7-8-22a}$$

を用いると，図7-9のように各点を対応させつつ，複素 z 平面における海域（図7-8の内域）を複素 w 平面の上半面に写像することができる．なお，複素解析関数 $\sqrt{w^2-1}$ の切断（cut）は実軸上の $-1 \leq \mathrm{Re}\, w \leq 1$ におき，$w \to \infty$ の極限で $\sqrt{w^2-1} \to w$ の分枝（branch）をとる．また，対数関数 $\log w$ の切断は正の実軸上におく．その結果，単純な境界形状となった w 平面における変数 w の解析関数の候補を考えることは容易である．そのうち最低次の漸近接続条件を満足する解は次式であることが以下で明らかになる．

$$\Phi(z) = \hat{\Phi}(w) = D\log w + F \tag{7-8-22b}$$

ここに，D, F は実数である．式(7-8-22b)を変換(7-8-22a)により変数 z の式に逆変換しその実部をとると，$\eta(x, y)$ の解

$$\eta_i(x, y) = \mathrm{Re}\,\Phi(z) = \mathrm{Re}\,\hat{\Phi}(w) = \mathrm{Re}\,(D\log w + F) \tag{7-8-23}$$

を得る．

■［漸近接続］

内域と外域が重なる領域で両者の解を漸近接続する．この問題では内域の両側に外域があるので，漸近接続を2ヶ所で行わねばならない．

■［漸近接続1　水路側］

水路側（$x < 0$）の外域解 η_{o-} (7-8-6) の中間極限は，

$$\eta_{o-} \sim B(\cos kl - kx\sin kl) \qquad (x < 0) \qquad kr \to 0+ \tag{7-8-24}$$

である．

次に，内域解 $\eta_i(x,y)$ (7-8-23) の中間極限 $(x<0, r/(\varepsilon\lambda)\to+\infty)$ をとる．変換 (7-8-22a) および図 7-9 の対応関係によれば，この中間極限操作は w 平面における $w\to 0$ の極限に対応する．そのとき，変換 (7-8-22a) より

$$\frac{\pi}{2\varepsilon\lambda}z \sim 1+\log w-\log(2j)=\log\frac{ew}{2j} \qquad (x<0) \qquad r/(\varepsilon\lambda)\to+\infty \tag{7-8-25}$$

を得ることに注意すると，内域解 $\eta_i(x,y)$ の中間極限は

$$\eta_i(x,y)\sim D\frac{\pi x}{2\varepsilon\lambda}-D\log\frac{e}{2}+F \qquad (x<0) \qquad r/(\varepsilon\lambda)\to+\infty \tag{7-8-26}$$

となる．

内域と外域が重なる領域において，外域解 η_{o-}(7-8-24) と内域解 $\eta_i(x,y)$(7-8-26) は，ともに x の 1 次関数である．したがって，次の条件

$$B\cos kl=-D\log\frac{e}{2}+F \tag{7-8-27}$$

および

$$Bk\sin kl=-\frac{\pi D}{2\varepsilon\lambda} \tag{7-8-28}$$

を満たすとき，式 (7-8-24,26) は恒等的に一致する．すなわち，漸近接続に成功する．

■ ［漸近接続 2　外洋側］

内域解の外洋側における中間極限 $(x>0, r/(\varepsilon\lambda)\to+\infty)$ をとる．

変換 (7-8-22a) および図 7-9 の対応関係によれば，この極限操作は w 平面における $w\to\infty$ の極限に対応する．この極限において，変換 (7-8-22a) より

$$w\sim\frac{j\pi}{2\varepsilon\lambda}z \qquad (x>0) \qquad r/(\varepsilon\lambda)\to+\infty \tag{7-8-29}$$

を得ることに注意すると，内域解 $\eta_i(x,y)$(7-8-23) の中間極限は

$$\eta_i(x,y)\sim \mathrm{Re}\left[D\log\frac{j\pi}{2\varepsilon\lambda}z\right]+F=D\log\frac{\pi}{2\varepsilon\lambda}r+F \quad (x>0) \quad r/(\varepsilon\lambda)\to+\infty \tag{7-8-30}$$

となる．

そこで，外洋側の外域解 η_{o+}(7-8-18) のうち港口による散乱波 η_S の式 (7-8-16) において，仮に第 1 項のみを残したもの

$$\eta_S=H_0^{(1)}(kr)C_0^{(1)}$$

の中間極限をとると，$H_0^{(1)}(kr)$ の $kr\to 0+$ の極限（巻末付録式 (A1-2a,c)）を用いて，

$$\eta_{o+}\sim 2A+C_0^{(1)}\left[1+\frac{2i}{\pi}\log\frac{\gamma kr}{2}\right] \qquad (x>0) \qquad kr\to 0+ \tag{7-8-31}$$

となる．ここに，

$$\log\gamma \equiv \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right] = 0.57721566\cdots \tag{A1-2d}$$

はオイラー定数である．

内域と外域が重なる領域（中間極限）において，外域解 η_{o+} と内域解 $\eta_i(x,y)$ は，ともに

$$\alpha\log r+\beta \qquad (\alpha,\beta\text{: 定数}) \tag{7-8-32}$$

という関数形をもつ．したがって，次の条件

$$2A+C_0^{(1)}\left[1+\frac{2i}{\pi}\log\frac{\gamma k}{2}\right] = D\log\frac{\pi}{2\varepsilon\lambda}+F \tag{7-8-33}$$

および

$$\frac{2iC_0^{(1)}}{\pi} = D \tag{7-8-34}$$

を満たすとき，式 (7-8-30,31) は恒等的に一致する．すなわち，散乱波 η_S の式 (7-8-16) において初項 $H_0^{(1)}(kr)C_0^{(1)}$ のみを残すことにより漸近接続の境界条件を満足することができる．

こうして，漸近接続の四つの条件式 (7-8-27,28,33,34) を得たので，積分定数 $C_0^{(1)}, B, D, F$ はすべて定まり，内域・外域を通じての近似解（統一解）を得ることができた．

このうち，水路内の外域解 η_{o-}

$$\eta_{o-} = \frac{2A\cos k(x+l)}{\cos kl+4\varepsilon\sin kl\log(4\varepsilon\gamma/e)-2\pi i\varepsilon\sin kl} \tag{7-8-35}$$

が特に興味深い．なぜならば，水路内の解 η_{o-} の振幅と，定在波すなわち式 (7-8-18) の第1項の振幅 $2A$ との比，

$$\frac{1}{\cos kl+4\varepsilon\sin kl\log(4\varepsilon\gamma/e)-2\pi i\varepsilon\sin kl}$$

の絶対値の2乗が，水路による**波のエネルギー増幅率**

$$Z = \frac{1}{\left[\cos kl+4\varepsilon\sin kl\log(4\varepsilon\gamma/e)\right]^2+\left[2\pi\varepsilon\sin kl\right]^2} \tag{7-8-36}$$

となるからである（図7-10）．

増幅率 Z は波数 k の特定の値 $\{k_n\}(n=1,2,\ldots$ ：ピーク波数) において鋭いピークをもつ．つまりこの水路は，そのピークに対応する波長および振動数の波に共鳴する．

式 (7-8-36) は $\varepsilon\to 0+$ の極限で

$$Z \to \frac{1}{\cos^2 kl} \qquad \varepsilon\to 0+ \tag{7-8-37}$$

となるため，ピークはいよいよ鋭くなり，そのピーク波数 $\{k_n\}$ は

$$k_n \to k_n^0 \equiv \left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\frac{1}{l} \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad \varepsilon\to 0+ \tag{7-8-38}$$

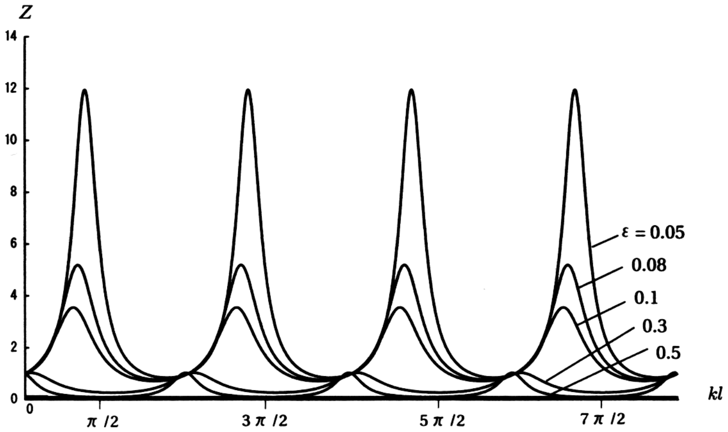


図 7-10　水路増幅率 Z

となる．すなわち，$\varepsilon \to 0+$ の極限では，水路端が水位の振幅最大の点である**腹**に，また水路口が振幅 0 の点である**節**となる**定在波**がたつ．

しかし，図 7-10 にも見えるように，$\varepsilon > 0$ のとき，ピーク波数 $\{k_n\}$ は $\varepsilon \to 0+$ の極限におけるピーク波数 $\{k_n^0\}$ からずれる．そのピーク波数の移動量 (shift) を求めるために，増幅率 Z の k_n^0 付近での波数 (k) 依存性をみてみよう．

いま，

$$k = k_n^0 + \Delta k, \quad k_n^0 \gg \Delta k \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{7-8-39}$$

とおくと，$O(\Delta kl)$ の精度で

$$\left.\begin{aligned} \cos(kl) &= \cos(k_n^0 l)\cos(\Delta kl) - \sin(k_n^0 l)\sin(\Delta kl) \sim (-1)^n \Delta kl \\ \sin(kl) &= \sin(k_n^0 l)\cos(\Delta kl) + \cos(k_n^0 l)\sin(\Delta kl) \sim (-1)^{n+1} \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon \to 0+ \tag{7-8-40}$$

と近似することができるので，増幅率 Z は $k = k_n^0$ の近傍で，

$$Z \sim \frac{1}{\left(\Delta kl - 4\varepsilon\log(4\varepsilon\gamma/e)\right)^2 + (2\pi\varepsilon)^2} = \frac{1}{\left((k - k_n)l\right)^2 + (2\pi\varepsilon)^2} \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{7-8-41}$$

$$k_n \equiv k_n^0 + 4\varepsilon\log(4\varepsilon\gamma/e)/l < k_n^0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7-8-42}$$

の k 依存性をもち，ピーク波数 $\{k_n\}$ は $\{k_n^0\}$ より減少することがわかる．

すなわち，共鳴する波の波数および振動数は減少し，波長および周期は大きくなる．この共鳴する波は，水路端に腹，水路口より L_n だけ外側に節をもつ定在波である．

$$\cos\left(k_n(L_n + l)\right) = 0, \quad k_n(L_n + l) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{7-8-43}$$

つまり，見かけ上，L_n だけ長い水路に定在波がたっている．それゆえ，L_n を**開口端補正**と呼ぶ．開口端補正 L_n は式 (7-8-42,43) より，

$$L_n/l = \frac{-4\varepsilon \log(4\varepsilon\gamma/e)}{(n-1/2)\pi} > 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{7-8-44}$$

である．

本節と同じく**漸近接続**を援用することにより,「狭い港口を通過する長波の回折（図 7-11(a)，演習問題 7-6, [41]）および「狭い港口をもつ矩形港湾で共鳴する長波」（図 7-12 , [39]）の近似解を得ることができる．

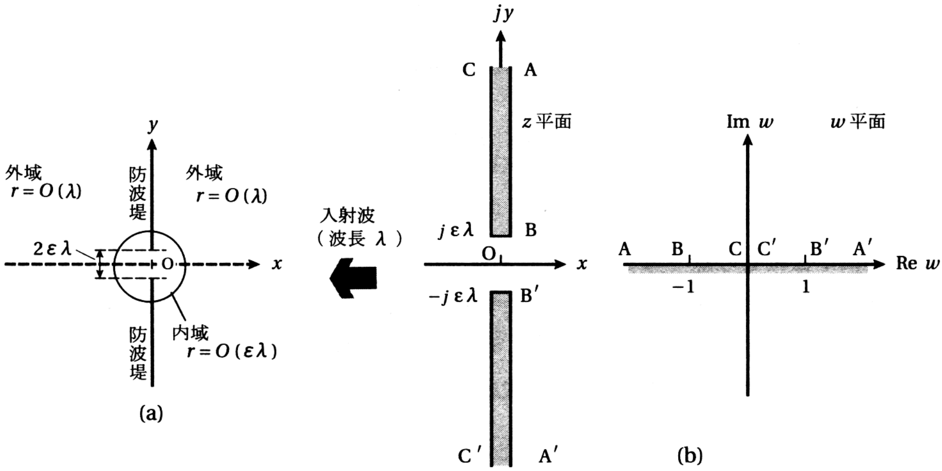


図 7-11　狭い港口を通過する長波の回折

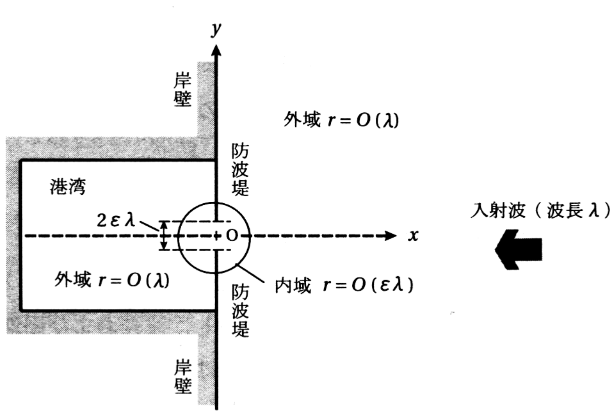


図 7-12　狭い港口をもつ矩形港湾で共鳴する長波

本節の「細長い矩形水路で共鳴する長波」を含むこれらの例題は，厳密解を得ることのできないノン・トリヴィアルな問題として，海洋から港内に侵入した波が複雑に反射・回折した結果生まれる波高分布を解析する数値シミュレーションのために恰好の検証例を提供する（[42]）．

以上，海面を伝播する重力波を例にとり特異摂動法の応用例を，複スケール解析，WKB 法，漸近接続それぞれ一例ずつ紹介した．言うまでもなく，漸近接続は境界層理論の指導原理である．

■ ［複素ポテンシャルの等角写像法］

複素ポテンシャルの等角写像法を用いて内域における水位の振幅 $\eta_i(x,y)$ の解 (7-8-23) を求める方法について解説する．

本節で対象とする長波の取り扱いに則り式 (7-4-9) を水深にわたり積分すると，

$$\eta = \frac{ik^2}{\omega}\int_{-h}^{0}\phi dz \sim \frac{ik^2}{\omega}h\phi(x,y,z=0) \qquad kh \to 0+ \tag{7-8-45}$$

を得る．すなわち，水位の振幅 $\eta(x,y)$ は係数を除いて速度ポテンシャルの振幅 ϕ と等価である．

速度ポテンシャル (7-1-4) と流れ関数 (4-1-20) はそれぞれラプラス方程式を満たす．さらに，速度ポテンシャルを実部，流れ関数を虚部とする複素関数，すなわち**複素ポテンシャル**はコーシー-リーマンの関係式 (3-4-13) を満たす．したがって，複素ポテンシャルは複素変数

$$z = x + jy \tag{7-8-20 再掲}$$

の**複素解析関数**である．それゆえ，内域の水位の振幅 $\eta_i(x,y)$ を，側壁境界条件 (7-7-9) を満足する複素ポテンシャルに適当な係数を乗じた複素解析関数 $\Phi(z)$ の実部

$$\eta_i(x,y) = \mathrm{Re}\,\Phi(z) \tag{7-8-21 再掲}$$

と表現することができる．

さて，振幅 $\eta_i(x,y)$ に関する側壁での境界条件 (7-7-9) を $\mathrm{Re}\,\Phi(z)$ で置き換えたもの

$$\frac{\partial\,\mathrm{Re}\,\Phi(z)}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \qquad (\boldsymbol{n}\text{：側壁の法線方向単位ベクトル}) \tag{7-8-46}$$

は，$\mathrm{Re}\,\Phi(z)$ の勾配ベクトル $\nabla(\mathrm{Re}\,\Phi(z))$ が側壁に沿っていることを意味している．

一方，同じく 3-4 節で述べたように，一般に複素解析関数 $\varphi(z)$ はその微分が 0 でない複素平面上の点においては実部 $\varphi_r(z)$ と虚部 $\varphi_i(z)$ の勾配ベクトルは直交する．

$$\nabla_z\varphi_r(z)\cdot\nabla_z\varphi_i(z) = 0 \tag{3-4-15 再掲}$$

したがって，解析関数 $\Phi(z)$ の虚部の勾配ベクトル $\nabla(\mathrm{Im}\,\Phi(z))$ は側壁に直交する．言い換えれば，$\Phi(z)$ の虚部 $\mathrm{Im}\,\Phi(z)$，すなわち流れ関数の値は側壁に沿って一定である．これは，流体は側壁に沿って流れる，ことを意味している．

こうして，$\eta_i(x,y)$ に関するラプラス方程式を解く問題を，側壁に沿ってその虚部が一定値をとる解析関数 $\Phi(z)$ を探す問題に帰着することができた．

しかし，図 7-8 の内域部分の側壁境界条件 (7-8-46) を満足する複素解析関数 $\Phi(z)$ を変数 $z=x+jy$ のままで求めることは困難である．

そこで，**複素ポテンシャルの等角写像**（conformal mapping）**法**を用いる．

複素 z 平面の点 z から複素 w 平面の点 w への写像

$$w=f(z) \tag{7-8-47}$$

が複素解析関数であるとき，z 平面の曲線とそれが w 平面に写像された曲線との間には次の関係がある．

A)　z 平面の微小閉曲線は，w 平面の相似な微小閉曲線に写像される．したがって，交わる 2 曲線のなす角は保存される．この性質から，複素解析関数 $w=f(z)$ による複素 z 平面から複素 w 平面への写像を**等角写像**と呼ぶ．
　　その結果，w 平面においても複素解析関数である複素ポテンシャルに関して次のことが成立する．

B)　z 平面の等ポテンシャル線（$\mathrm{Re}\Phi(z)=$ 一定）は w 平面の等ポテンシャル線（$\mathrm{Re}\Phi(z)=\mathrm{Re}\,\hat{\Phi}(w)=$ 一定）に写像され，z 平面の流線（$\mathrm{Im}\,\Phi(z)=$ 一定）は w 平面の流線（$\mathrm{Im}\,\Phi(z)=\mathrm{Im}\,\hat{\Phi}(w)=$ 一定）に写像される．したがって，

C)　z 平面において直交する等ポテンシャル線と流線は，w 平面においても直交する．

さらに，複素 z 平面内の多角形の内部領域は，等角写像の一つであるシュバルツ-クリストッフェル（Schwarz-Christoffel）変換

$$\frac{dw}{dz}=K(w-a)^{1-\alpha/\pi}(w-b)^{1-\beta/\pi}\cdots \tag{7-8-48}$$

により，複素 w 平面の上半面に写像することができる．ここに，K は係数，$\alpha,\beta,\ldots$ は z 平面内の多角形の各頂点の内角，$a,b,\ldots$ はそれぞれの頂点が対応する w 平面実軸上の座標である（[17]［40]）．

具体的には，本節の問題の複素 z 平面の境界を変数変換

$$z=x+jy=\frac{2\varepsilon\lambda}{\pi}\left[-j\sqrt{w^2-1}+\log\frac{w}{\sqrt{w^2-1}+j}\right] \tag{7-8-22a 再掲}$$

により複素平面 w の上半面に，図 7-9 のように各点を対応させせつつ写像することができる．すなわち，シュバルツ-クリストッフェル変換 (7-8-22a) を用いることにより，z

平面の複雑な形状の側壁での境界条件 (7-7-9)，すなわち

$$\mathrm{Im}\,\Phi(z) = \text{一定} \tag{7-8-49}$$

を満足する複素解析関数 $\Phi(z)$ を求める問題を，直線上の単純な形状の側壁境界条件

$$\mathrm{Im}\,\hat{\Phi}(w) = \text{一定} \tag{7-8-49a}$$

を満たす w 平面の複素解析関数 $\hat{\Phi}(w) \equiv \Phi(z)$ を求める問題に帰着することができる．

境界条件 (7-8-49a) を満たす複素解析関数 $\hat{\Phi}(w)$ の候補は無数にあるが，これらのうち $O(\epsilon)$ の精度で水路側と外洋の二つの外域との漸近接続を可能とする解は

$$\Phi(z) = \hat{\Phi}(w) = D\log w + F \tag{7-8-22b 再掲}$$

である．

7-9　音響工学・地震学への応用

一見なんの関連もないようにみえる複数の（自然）現象が数学的には全く等価な現象であることを理解する，というのは物理学の醍醐味である．本節ではその一例として音波および地震波が海の線形長波と数学的に等価であることを指摘しておこう（[13]）．その当然の帰結として，海の線形長波に関して 7-7 および 7-8 節で得た成果を，対応する音響工学および地震学の問題にそのまま当てはめることができる．

なお，線形現象に関しては，音響工学で先に得られた研究成果（[43]）を港湾波浪の研究（たとえば [44] ～ [48]）に取り入れたという経緯がある．

■［音波］

密度変化が無視できる海の波（7-1 節）においては流体力学の支配方程式のうち連続の式は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{7-1-2 再掲}$$

と簡略化できたが，空気など流体媒質の密度の揺らぎが伝播する疎密波（縦波）においては，より一般的な連続の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\boldsymbol{v} = 0 \tag{7-9-1}$$

を用いる必要がある．

流体力学のもう一つの支配方程式ナヴィエ-ストークス方程式を，非粘性・非回転性の仮定を用いて積分したベルヌイの式

$$\frac{p}{\rho} = -gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}|\nabla \varphi|^2 + C(t) \tag{7-1-6 再掲}$$

において，音波では重力を無視することができる．

ここで，媒質の密度および圧力をそれらの基準（平均）値すなわち音波のないときの値（添え字 “$_0$”）と揺らぎ成分（δ を前につける）

$$\rho(t) = \rho_0 + \delta\rho(t) \tag{7-9-2}$$

$$p(t) = p_0 + \delta p(t) \tag{7-9-3}$$

に分解すると，通常の音波においては，それぞれの基準値と揺らぎ成分の間には

$$\rho_0 \gg \delta\rho(t), \quad p_0 \gg \delta p(t) \tag{7-9-4}$$

の条件が成立する．

そこで，後に音速であることが判明する（演習問題 7-7）

$$c = \sqrt{\left.\frac{dp}{d\rho}\right]_{\rho=\rho_0}} \tag{7-9-5}$$

を用いて，

$$\delta p(t) \sim c^2 \delta\rho(t), \quad \delta\rho(t)/\rho_0 \to 0 \tag{7-9-6}$$

により $\delta p(t)$ を消去することができる．この結果を式 (7-1-6) に代入し，$\delta\rho(t)$ および φ に関して線形近似すると，

$$c^2 \delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{7-9-7}$$

を得る．連続の式 (7-9-1) についても線形近似を施すと，

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla^2 \varphi = 0 \tag{7-9-8}$$

を得る．式 (7-9-7,8) から密度の揺らぎ成分 $\delta\rho(t)$ を消去すると，最終的に速度ポテンシャルの満たすべき波動方程式

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \varphi = 0 \tag{7-9-9}$$

を得る．ここで，2 次元問題（$\partial/\partial z = 0$）を考えると，式 (7-9-9) は，

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{7-9-9a}$$

となる．

境界条件は，流速の境界に対する垂直成分が 0 であること，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \tag{7-2-1 再掲}$$

である．ここに $\boldsymbol{n}$ は境界の法線方向ベクトルである．

こうして導かれた音波の2次元境界値問題（微分方程式(7-9-9a)と境界条件(7-2-1)）は線形長波の境界値問題

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)=0,\quad c^2=gh \tag{7-7-10 再掲}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial n}=0 \tag{7-7-9 再掲}$$

と数学的に等価である．

つまり，水位ζを音波の媒質（たとえば，空気）の速度ポテンシャルφに，かつ長波の位相速度$c=\sqrt{gh}$を音波の位相速度$c=\sqrt{dp/d\rho}$に置き換えれば，二つの境界値問題は数学的に同一なのである．

したがって，線形長波が矩形港湾で共鳴する境界値問題を解くことはすなわち，音波が矩形の管楽器（一端が開放されている笛：閉管）内で共鳴する境界値問題を解いたことになる．特に，7-8節で詳細に検討した開口端補正の問題は，笛に共鳴する音程を定めるために重要な要素である．

■ ［地震波］

地震波のうち，地球内部を伝播する横波（secondary waves）の中で地震動の方向が水平方向であるため，建物を倒壊させるなど社会に最も悪影響を及ぼすのがSH波である．このうち2次元的に伝播すると近似できるもの，すなわち1方向には一様である**2次元SH波**の微分方程式と境界条件はそれぞれ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0,\quad c^2=\mu/\rho \tag{7-9-10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0 \tag{7-9-11}$$

である（[13]）．ここに，$u,\mu,\rho,c=\sqrt{\mu/\rho}$はそれぞれ，媒質（地盤）の変位（地震動方向：$z$），ずれ剛性率，密度，位相速度である．

2次元SH波の境界値問題が線形長波の境界値問題

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)=0,\quad c^2=gh \tag{7-7-10 再掲}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial n}=0 \tag{7-7-9 再掲}$$

と数学的に等価であることは，著者が別の場で詳しく紹介している（[13]）．

つまり，水位ζを媒質（地盤）の変位uに，かつ長波の位相速度$c=\sqrt{gh}$をSH波の位相速度$c=\sqrt{\mu/\rho}$に置き換えれば，二つの境界値問題は数学的に同一である．

それゆえ，線形長波が港湾で共鳴する境界値問題を解くことはすなわち，2次元SH

波がその港湾と相似形の丘ないし山で共鳴する境界値問題を解いたことになる．

物理学を学び始めた高校生は，バネの振動 (1-2-8) と交流回路 (1-2-10) が数学的に等価であることに感動を覚えるが，長波と音波および地震波との数学的等価性には大人を感動させる魅力がある．

本節の説明により，特異摂動法の応用例を音響工学および地震学の分野に数多く見出しうることは明らかであろう．

また，読者もすでに気づいているように，数学的に互いに等価な式である (7-7-10), (7-9-9a),(7-9-10) は最も基本的な 2 次元波動方程式である．したがって，本章で解説した特異摂動法の応用例はあらゆる分野の波動現象に応用しうる可能性を秘めている．

以上，著者の経験の中から具体的に指摘できた応用分野は限られるが，これらの成功例から，特異摂動法という微分方程式の体系的近似解法がさまざまな分野で応用されうることが実感できたであろうことを期待する．

第 7 章の演習問題

7-1　一定水深海面の y 方向に一様な平面単色進行波の速度ポテンシャルの解 (7-4-8) および分散関係式 (7-4-10) を導け．

7-2　分散関係式 (7-4-10) から群速度の式 (7-5-29) を導け．

7-3　線形波の水面の単位面積あたりの時間平均エネルギー E が

$$E \equiv \left\langle \frac{\rho}{2}\int_{-h}^{\xi}(\nabla\varphi)^2 dz + \int_0^{\xi}\rho g z dz \right\rangle = \frac{1}{2}\rho g A^2 \tag{7-5-28}$$

と表されることを証明せよ．

7-4　「波動の作用」の保存則 (7-6-18) を導け．

7-5　連続の式の積分形 (7-7-7) を導け．

7-6　漸近接続の手法を用いて,「x 軸の正の方向から直線状の完全反射防波堤に垂直に入射する波数 k，振幅 A の長波 η_I

$$\eta_I = Ae^{-ikx} \qquad \text{(7-8-1 再掲)}$$

が，狭い港口（開口幅 $2\varepsilon\lambda$）を通過する回折問題」（図 7-11(a)）の近似解を求めよ．

なお，この問題の複素 z 平面の境界を変数変換

$$z = x + jy = -\frac{j\varepsilon\lambda}{2}\left[w + \frac{1}{w}\right]$$

により複素平面 w の上半面に，図 7-11(b) のように各点を対応させつつ写像することができる．

7-7　式 (7-9-5) から空気中の音速の式

$$c = 332 + 0.6t \quad [\text{m/s}], \quad (t^\circ\text{C})$$

を導け．

付録A. 特殊関数

本書に現れる特殊関数に関する基本性質を掲げる．これらはいずれも特異摂動法をはじめ漸近級数展開を用いた解析において重要な役割を担う関数である．詳しくは参考文献，たとえば，[11]［12］などを参照されたい．

なお，以下では特に断らない限り，z, ν は複素数，x は実数，n は整数を表すものとする．

A-1　ベッセル関数

円筒座標によるラプラスの方程式がベッセルの微分方程式となるので，ベッセル関数（Bessel functions）を円柱（円筒）関数と呼ぶことがある．

正規特異点（または確定特異点 regular singular point）$z=0$ と非正規特異点（irregular singular point）$z=\infty$ を有するベッセルの微分方程式

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - \nu^2) y = 0 \tag{A1-1}$$

の解には，第 1 種ベッセル関数 $J_{\pm\nu}(z)$，第 2 種ベッセル関数 $Y_\nu(z)$，第 1 種ハンケル（Hankel）関数 $H_\nu^{(1)}(z)$，第 2 種ハンケル関数 $H_\nu^{(2)}(z)$ がある．ハンケル関数を第 3 種ベッセル関数と呼ぶことがある．

このうち，第 1 種ベッセル関数 $J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ は ν が整数 n であるときに限り 1 次従属

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

であるが，それ以外の場合にはこれら五つの解のうち任意の二つの線形結合がベッセルの微分方程式 (A1-1) の一般解である．

解のうち，$J_n(z)$（n：整数）は全複素平面において正則な整関数（entire functions）であり，その他は負の実数軸に切断（cut）をもつ正則関数（解析関数 regular functions, holomorphic functions）である．一方，$z \neq 0$ を固定したとき，これら四つのベッセル関数はいずれも ν の整関数である．5-4 節に現れた関数 $J_0(z)$，$J_1(z)$ を図 A-1 に示す．

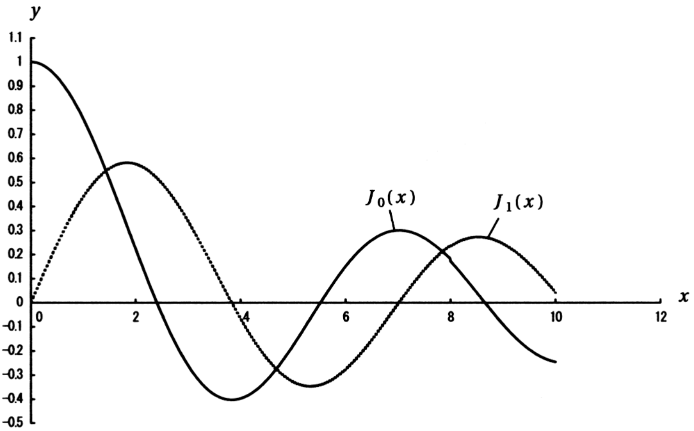


図 **A-1**　第 1 種ベッセル関数 $J_0(x), J_1(x)$

$J_\nu(z)$, $Y_n(z)$ のフロビニウス (Frobenius) 展開は,

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \tag{A1-2a}$$

$$Y_n(z) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!(z^2/4)^k}{k!} + \frac{2}{\pi}\log\left(\frac{z}{2}\right) J_n(z)$$
$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \big(\psi(k+1)+\psi(n+k+1)\big)\frac{(-z^2/4)^k}{k!(n+k)!} \quad (n：自然数) \tag{A1-2b}$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi}\log\left(\frac{\gamma z}{2}\right) J_0(z) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}}{(k!)^2}\left(\frac{z^2}{4}\right)^k \tag{A1-2c}$$

ここに

$$\log\gamma \equiv \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right] = 0.57721566\cdots \tag{A1-2d}$$

はオイラー定数[*1], $\psi(z)$ はプサイ (psi) 関数である (A-3 節「ガンマ関数」式 (A3-8)).

各ベッセル関数 $J_\nu(z), Y_\nu(z), H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)$ の間には次の関係

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\nu \neq 整数,\ \nu = 整数ではその極限) \tag{A1-3a}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) \tag{A1-3b}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z) \tag{A1-3c}$$

がある.

*1 オイラー定数 $\log\gamma$ を単に γ と表記することもある ([11]).

$J_\nu(x)$ の母関数は

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^n J_n(z) \qquad (t\neq 0) \tag{A1-4}$$

である.

$J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ の積分表示は以下の通りである.

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\theta-\nu\theta)d\theta-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty \exp(-z\sinh t-\nu t)dt$$
$$(|\arg z|<\pi/2) \tag{A1-5a}$$

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\theta-n\theta)d\theta=\frac{i^{-n}}{\pi}\int_0^\pi \exp(iz\cos\theta)\cos(n\theta)d\theta \tag{A1-5b}$$

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \exp(z\sinh w-\nu w)dw \qquad (|\arg z|<\pi/2) \tag{A1-5c}$$

（積分径路 C は $\infty-i\pi$ を始点，$\infty+i\pi$ を終点とする任意の曲線）

$$Y_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(z\sin\theta-\nu\theta)d\theta-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty (e^{\nu t}+e^{-\nu t}\cos\nu\pi)\exp(-z\sinh t)dt$$
$$(|\arg z|<\pi/2) \tag{A1-6}$$

ベッセルの微分方程式 (A1-1) が $z\to\infty$ の極限で

$$y''+y=0 \tag{A1-1a}$$

に漸近することから推定できるように，ベッセル関数 $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ の $z\to\infty$ における漸近級数展開は，漸近級数を係数にもつ調和関数の形をもつ.

$$J_\nu(z)=\sqrt{2/(\pi z)}\big(P(\nu,z)\cos(z-(2\nu+1)\pi/4)-Q(\nu,z)\sin(z-(2\nu+1)\pi/4)\big)$$
$$(|\arg z|<\pi) \tag{A1-7}$$

$$Y_\nu(z)=\sqrt{2/(\pi z)}\big(P(\nu,z)\sin(z-(2\nu+1)\pi/4)+Q(\nu,z)\cos(z-(2\nu+1)\pi/4)\big)$$
$$(|\arg z|<\pi) \tag{A1-8}$$

$$P(\nu,z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\nu,2k)}{(2z)^{2k}} \qquad z\to\infty \quad (|\arg z|<\pi)$$
$$=1-\frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8z)^2}+\frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)(4\nu^2-49)}{4!(8z)^4}-\cdots \tag{A1-9a}$$

$$Q(\nu,z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\nu,2k+1)}{(2z)^{2k+1}} \qquad z\to\infty \quad (|\arg z|<\pi)$$
$$=\frac{4\nu^2-1}{8z}-\frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{3!(8z)^3}+\cdots \tag{A1-9b}$$

ここに

$$(\nu,2k)\equiv\frac{\Gamma(\nu+1/2+2k)}{(2k)!\Gamma(\nu+1/2-2k)} \tag{A1-10}$$

はハンケルの記号である.

また, $J_\nu(\nu)$, $Y_\nu(\nu)$ の $\nu\to+\infty$ における漸近級数展開の主要部は以下の通りである.

$$J_\nu(\nu)\sim\frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3}3^{1/6}\pi\nu^{1/3}}=\frac{2^{1/3}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)\nu^{1/3}}\qquad \nu\to+\infty \tag{A1-11}$$

$$Y_\nu(\nu)\sim-\frac{3^{1/3}\Gamma(1/3)}{2^{2/3}\pi\nu^{1/2}}=-\frac{2^{1/3}}{3^{1/6}\Gamma(2/3)\nu^{1/2}}\qquad \nu\to+\infty \tag{A1-12}$$

$J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ の $z\to\infty$ における漸近級数展開 (A1-7,8) からハンケル関数 $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ の $z\to\infty$ における漸近級数展開の主要部は,

$$H_\nu^{(1)}(z)\sim\sqrt{2/(\pi z)}\exp[i(z-\nu\pi/2-\pi/4)]\qquad z\to\infty\quad(-\pi<\arg z<2\pi) \tag{A1-13a}$$

$$H_\nu^{(2)}(z)\sim\sqrt{2/(\pi z)}\exp[-i(z-\nu\pi/2-\pi/4)]\qquad z\to\infty\quad(-2\pi<\arg z<\pi) \tag{A1-13b}$$

であり, 7-8 節に言及するように第 1 種ハンケル関数は波源から無限遠に放射する波動が満たすべき境界条件を満足する.

ベッセル関数の微分を含む漸化式のうち主なものを掲げる. なお, 式 (A1-14ab,15) を第 1 種のベッセル関数 $J_\nu(z)$ で代表して表示するが, すべて 4 種のベッセル関数 $J_\nu(z), Y_\nu(z), H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)$ に共通して成立する.

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k\left[z^\nu J_\nu(z)\right]=z^{\nu-k}J_{\nu-k}(z)\qquad(k=0,1,2,3,\dots) \tag{A1-14a}$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k\left[z^{-\nu} J_\nu(z)\right]=(-1)^k z^{-\nu-k}J_{\nu+k}(z)\qquad(k=0,1,2,3,\dots) \tag{A1-14b}$$

特に次式は 5-4 節で利用した.

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{2}\left\{J_0^2(cz)+J_1^2(cz)\right\}\right]=zJ_0^2(cz)\qquad(c：定数) \tag{A1-15}$$

A-2　変形ベッセル関数

正規特異点 $z=0$ と非正規特異点 $z=\infty$ を有する変形ベッセル微分方程式

$$z^2y''+zy'-(z^2+\nu^2)y=0 \tag{A2-1}$$

の解には, 第 1 種変形ベッセル関数 (modified Bessel functions) $I_{\pm\nu}(z)$ と第 2 種変形ベッセル関数 $K_\nu(z)$ がある. このうち, 第 1 種変形ベッセル関数 $I_\nu(z)$ と $I_{-\nu}(z)$ は ν が整数 n であるときに限り 1 次従属

$$I_{-n}(z)=I_n(z)$$

であるが, それ以外の場合にはこれら三つの解のうち任意の二つの線形結合が変形ベッセル微分方程式 (A2-1) の一般解である.

解のうち，$I_n(z)$（n：整数）は全複素平面において正則な整関数であり，その他は負の実数軸に切断をもつ正則関数（解析関数）である．一方，$z \neq 0$ を固定したとき，これら三つの変形ベッセル関数はいずれも ν の整関数である．

$I_\nu(z)$ のフロビニウス展開は，

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \tag{A2-2}$$

であり，$I_\nu(z)$ と $K_\nu(z)$ の関係は

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)} \qquad (\nu \neq \text{整数},\ \nu = \text{整数ではその極限}) \tag{A2-3}$$

である．

$I_\nu(z)$ の母関数は

$$\exp\left(\frac{z(t+1/t)}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n I_n(z) \qquad (t \neq 0) \tag{A2-4}$$

である．

$I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ の積分表示は以下の通りである．

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \exp(z\cos\theta)\cos(\nu\theta)d\theta - \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty \exp(-z\cosh t - \nu t)dt \qquad (|\arg z| < \pi/2) \tag{A2-5}$$

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty \exp(-z\cosh t)\cosh(\nu t)dt \qquad (|\arg z| < \pi/2) \tag{A2-6}$$

$I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ の $z \to \infty$ における漸近級数展開は以下の通りである．

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left(1 - \frac{4\nu^2-1}{8z} + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8z)^2} - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{3!(8z)^3} + \cdots\right)$$
$$z \to \infty \quad (|\arg z| < \pi/2) \tag{A2-7}$$

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left(1 + \frac{4\nu^2-1}{8z} + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{3!(8z)^3} + \cdots\right)$$
$$z \to \infty \quad (|\arg z| < 3\pi/2) \tag{A2-8}$$

A-3　ガンマ関数

ガンマ関数 (gamma function) $\Gamma(z)$ は次の積分

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0) \tag{A3-1}$$

で定義され，差分方程式

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{A3-2}$$

を満足する．それゆえ，

$$\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$$

を用いて，複素平面全体に解析接続することができる．その特異点 (1 次の極) は $z = -n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ である．

特に，独立変数 z が自然数 n であるとき，

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)! \tag{A3-3}$$

であるから，ガンマ関数は一般化された階乗関数とみなすことができる．

ガンマ関数の漸近級数展開 (スターリングの公式) は次式である．

$$\Gamma(z) \sim \left(\frac{z}{e}\right)^z \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \cdots\right)$$
$$z \to \infty \quad (|\arg z| < \pi) \tag{A3-4}$$

独立変数の特定の値

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2 \tag{A3-5}$$

および，次の公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)\Gamma(z) = \pi \operatorname{cosec}(\pi z) \tag{A3-6}$$

は数値計算上有用である．

ガンマ関数の二重公式および三重公式はそれぞれ，

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{2z-1/2} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \tag{A3-7a}$$

$$\Gamma(3z) = \frac{1}{2\pi} 3^{3z-1/2} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right) \tag{A3-7b}$$

である．

ガンマ関数の対数の導関数をプサイ (psi) 関数 $\psi(z)$ と呼ぶ．

$$\psi(z) = \frac{d(\log \Gamma(z))}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{A3-8}$$

プサイ関数は，z が自然数のとき

$$\psi(1) = -\log\gamma, \quad \psi(n) = -\log\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \qquad (n \geq 2) \tag{A3-9}$$

である.

A-4 放物円筒関数

非正規特異点 $z=\infty$ を有する放物円筒関数 (parabolic cylinder functions) の微分方程式

$$y'' - (z^2/4 + k)y = 0 \tag{A4-1}$$

の偶関数および奇関数の解はそれぞれ,

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n} z^{2n}}{(2n)!}, \quad y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_2 = a_3 = k, \quad a_{n+2} = k a_n + \frac{1}{4} n(n-1) a_{n-2} \qquad (n \geq 2) \tag{A4-2}$$

であり, y_1, y_2 の 1 次結合が微分方程式 (A4-1) の一般解である.

その漸近形に関する使い勝手のよさから, 放物円筒関数 $U(k,z)$ および $U(k,-z)$ を基本解として用いることが多い.

$$U(k,z) = \cos\left[\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}k\right)\right] \frac{\Gamma(1/4 - k/2)}{\sqrt{\pi}\, 2^{k/2+1/4}} y_1 - \sin\left[\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}k\right)\right] \frac{\Gamma(3/4 - k/2)}{\sqrt{\pi}\, 2^{k/2-1/4}} y_2 \tag{A4-3}$$

その $x \to \pm\infty$ における漸近級数展開は以下の通りである.

$$U(k,x) \sim \exp(-x^2/4) x^{-k-1/2} \cdot\left(1 - \frac{(k+1/2)(k+3/2)}{2x^2} + \frac{(k+1/2)(k+3/2)(k+5/2)(k+7/2)}{2\cdot 4x^4} - \cdots\right) \qquad x \to +\infty \tag{A4-4}$$

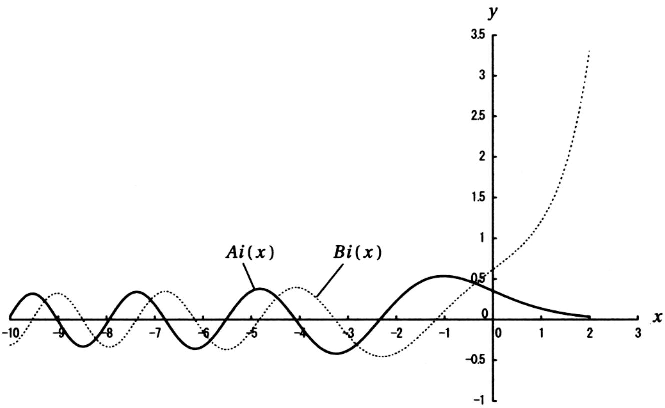
$$U(k,-x) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(k+1/2)} \exp(x^2/4) x^{k-1/2} \cdot\left(1 + \frac{(k-1/2)(k-3/2)}{2x^2} + \frac{(k-1/2)(k-3/2)(k-5/2)(k-7/2)}{2\cdot 4x^4} + \cdots\right) \qquad x \to +\infty \tag{A4-5}$$

A-5 エィリー関数

非正規特異点 $z=\infty$ を有するエィリーの微分方程式

$$y'' = zy \tag{A5-1}$$

の一般解はエィリー関数（Airy functions）$Ai(z)$ と $Bi(z)$ の線形結合である．前者を第1種のエィリー関数，後者を第2種のエィリー関数と呼ぶことがある（図A-2）．



図A-2　エィリー関数

エィリーの微分方程式の右辺 y の係数 z が正の実数軸上（$x>0$）にあるとき，解 y は指数関数的振る舞いを見せる．すなわち，$Ai(x)$ は指数関数的に減衰し，$Bi(x)$ は指数関数的に発散する．一方，右辺 y の係数 z が負の実数軸上（$x<0$）にあるとき，解 y は正弦関数的な振動関数となる．

特に $Ai(x)$ は，力学的全エネルギーがポテンシャルエネルギーを超えない区間（$x<0$）では通常の振動解であり，一方，力学的全エネルギーがポテンシャルエネルギーを超える区間（$x>0$），すなわち古典力学では進入することが不可能な区間へ浸み込んでてゆく量子力学的効果を表現する関数である．

エィリー関数のテイラー展開は次式である．

$$
\begin{aligned}
Ai(z) &= 3^{-2/3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n}}{3^{2n}n!\Gamma(n+2/3)} - 3^{-4/3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n+1}}{3^{2n}n!\Gamma(n+4/3)} \\
Bi(z) &= 3^{-1/6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n}}{3^{2n}n!\Gamma(n+2/3)} + 3^{-5/6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n+1}}{3^{2n}n!\Gamma(n+4/3)}
\end{aligned}
\qquad \text{(A5-2)}
$$

エィリー関数の漸近級数展開は次式である．

$$
Ai(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{-n} \qquad z\to\infty \qquad (|\arg z|<\pi)
$$

$$
Bi(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{-n} \qquad z\to\infty \qquad (|\arg z|<\pi/3)
$$

$$Ai(-z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \left(\sin\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n} \left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{-2n} - \cos\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n+1} \left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{-2n-1} \right) \quad z \to \infty \quad (|\arg z| < 2\pi/3)$$

$$Bi(-z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \left(\sin\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n+1} \left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{-2n-1} + \cos\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n} \left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{-2n} \right) \quad z \to \infty \quad (|\arg z| < 2\pi/3)$$

$$c_0 = 1, \quad c_n = \frac{\Gamma(3n+1/2)}{54^n n! \Gamma(n+1/2)} \quad (n = 1,2,3,\ldots) \tag{A5-3}$$

エィリー関数はベッセル関数，変形ベッセル関数で表すことができる．

$$\begin{aligned} Ai(z) &= \frac{\sqrt{z}}{3}\left(I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) - I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right) = \frac{\sqrt{z/3}}{\pi} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \\ Ai(-z) &= \frac{\sqrt{z}}{3}\left(J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + J_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right) \\ Bi(z) &= \sqrt{\frac{z}{3}}\left(I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right) \\ Bi(-z) &= \sqrt{\frac{z}{3}}\left(J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) - J_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right) \end{aligned} \tag{A5-4}$$

エィリー関数の積分表示は以下の通りである．

$$\begin{aligned} Ai(\pm x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}t^3 \pm xt\right) dt \\ Bi(\pm x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{1}{3}t^3 \pm xt\right) + \sin\left(\frac{1}{3}t^3 \pm xt\right)\right] dt \end{aligned} \tag{A5-5}$$

A-6 ヤコビの楕円関数

6-3 節に現れたヤコビの楕円関数（Jacobian elliptic functions）の一つ，$y = \mathrm{sn}(x, m)$ は第 1 種楕円積分

$$x = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} = \int_0^{\arcsin y} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}}, \quad t = \sin\theta \tag{A6-1}$$

により定義される．被積分関数中の係数 m を関数 $\mathrm{sn}(x, m)$ の母数と呼ぶ．適当な変数変換を施すことにより一般性を失うことなく，母数 m の定義域を

$$0 \le m \le 1$$

に制限することができる（[11]）．また，関数 $\mathrm{sn}(x,m)$ は母数 m が 0 と 1 のときに限り初等関数で表すことができる．

$$\mathrm{sn}(x,0)=\sin x,\quad \mathrm{sn}(x,1)=\tanh x \tag{A6-2}$$

関数 $\mathrm{sn}(x,m)$ は，m が 0 であるときの形

$$x=\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin y$$

からも類推できるように周期関数である．その周期 T は第 1 種完全楕円積分

$$K(m)=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}} \tag{A6-3}$$

を用いて

$$T=4K(m)$$

と表すことができる．

A-7　フレネル積分と誤差関数

$$C(z)=\int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{\cos u}{\sqrt{u}}du,\quad x=\frac{\pi}{2}z^2 \tag{A7-1}$$

$$S(z)=\int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}}du \tag{A7-2}$$

をフレネル積分（Fresnel integrals）と呼ぶ．

フレネル積分のベキ級数展開は以下の通りである．

$$\begin{aligned}C(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\pi/2)^{2n}}{(2n)!(4n+1)}z^{4n+1}\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{1\cdot3\cdot5\cdots(4n+1)}z^{4n+1}+\sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdots(4n+3)}z^{4n+3}\end{aligned} \tag{A7-3}$$

$$\begin{aligned}S(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!(4n+3)}z^{4n+3}\\&=-\cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdots(4n+3)}z^{4n+3}+\sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{1\cdot3\cdot5\cdots(4n+1)}z^{4n+1}\end{aligned} \tag{A7-4}$$

フレネル積分の漸近級数展開は以下の通りである．

$$C(z)=\frac{1}{2}+f(z)\sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)-g(z)\cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right) \tag{A7-5}$$

$$S(z)=\frac{1}{2}-f(z)\cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)-g(z)\sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right) \tag{A7-6}$$

$$\pi z f(z)\sim 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(4n-1)}{(\pi z^2)^{2n}} \qquad z\to\infty \qquad (|\arg z|<\pi/2) \tag{A7-7}$$

$$\pi z g(z)\sim \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(4n+1)}{(\pi z^2)^{2n+1}} \qquad z\to\infty \qquad (|\arg z|<\pi/2) \tag{A7-8}$$

誤差関数（error function）

$$\mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-t^2)\,dt \tag{A7-9}$$

とフレネル積分との間には次の関係がある．

$$C(z)+iS(z)=\frac{1+i}{2}\mathrm{erf}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-i)z\right] \tag{A7-10}$$

付録 B. 常微分方程式の厳密解を得る基本公式

B-1 1階非斉次線形微分方程式

$$y' + q(x)y = r(x) \tag{B1-1}$$

の一般解は

$$y(x) = e^{-Q(x)}\left(\int^x e^{Q(t)} r(t)\,dt + C\right) \tag{B1-2}$$

である．ここに C は積分定数である．

また，$Q(x)$ は

$$Q(x) = \int^x q(t)\,dt \tag{B1-3}$$

であり，$e^{-Q(x)}$ が非斉次方程式 (B1-1) に対応する 1 階斉次線形微分方程式

$$y' + q(x)y = 0 \tag{B1-4}$$

の解である．

B-2 2階斉次線形微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{B2-1}$$

は，変換

$$z = y'/y \tag{B2-2}$$

により，1 階のリカッティ方程式

$$z' + z^2 + p(x)z + q(x) = 0 \tag{B2-3}$$

に変換できる．

2 階斉次線形微分方程式 (B2-1) の有意な特解 $y_1(x)$ を一つ発見することができれば，その一般解

$$y(x)=y_1(x)\left(A+B\int^x \frac{\exp\left(-\int^t p(u)du\right)}{\left(y_1(t)\right)^2}dt\right) \tag{B2-4}$$

を得る．ここに A,B は積分定数である．

B-3　2 階非斉次線形微分方程式

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \tag{B3-1}$$

に対応する 2 階斉次線形微分方程式 (B2-1) の二つの独立な特解 $y_1(x)$，$y_2(x)$ が得られているとき，2 階非斉次線形微分方程式 (B3-1) の一般解は

$$y(x)=Ay_1(x)+By_2(x)-y_1(x)\int^x \frac{r(t)y_2(t)}{W(t)}dt+y_2(x)\int^x \frac{r(t)y_1(t)}{W(t)}dt \tag{B3-2}$$

である．ここに

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{B3-3}$$

はロンスキー行列式 (Wronskian) である．

B-4　3 階斉次線形微分方程式　階数降下法

$$y'''+p_2(x)y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=0 \tag{B4-1}$$

の有意な特解 $y_1(x)$ を一つ発見することができれば，変換

$$y(x)=y_1(x)\int^x z(t)dt \tag{B4-2}$$

により，$y(x)$ の微分方程式 (B4-1) は $z(x)$ の 2 階斉次線形微分方程式

$$y_1(x)z''(x)+\left(3y_1'(x)+p_2(x)y_1(x)\right)z'(x)$$
$$+\left(3y_1''(x)+2p_2(x)y_1'(x)+p_1(x)y_1(x)\right)z(x)=0 \tag{B4-3}$$

に変換される．

一般に，n 階斉次線形微分方程式の有意な特解 $y_1(x)$ を一つ発見することができれば，変換 (B4-2) により，$y(x)$ の n 階斉次線形微分方程式は $z(x)$ の $n-1$ 階斉次線形微分方程式に変換できる．

従属変数 y をすべて cy で置き換えたとき，微分方程式が不変であるならば，その微分方程式は変数 y に関して**同次**であるという．変数 y に関して同次の微分方程式は，変数変換

$$y = e^z \tag{B4-4}$$

により，変数 $u(x) = dz(x)/dx$ に関する，もとの $y(x)$ に関する微分方程式より 1 階低い微分方程式に変換することができる．

B-5　自律系（非線形）微分方程式

独立変数が陽に現れない微分方程式を**自律系**（autonomous）微分方程式と呼ぶ．n 階自律系微分方程式

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{B5-1}$$

において，解くべき関数の微分 $y'(x)$ を，y を変数とする新しい関数 $z(y)$

$$z(y) \equiv y'(x) \tag{B5-2}$$

で置き換えることにより，以下のように $y(x)$ の k 階の導関数は $z(y)$ の $k-1$ 階以下の導関数で表すことができるので，

$$y''(x) = \frac{d}{dx}z(y) = \frac{dz(y)}{dy}\frac{dy}{dx} = z'(y)z(y) \tag{B5-3a}$$

$$y^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}\left(z'(y)z(y)\right) = \frac{d\left(z'(y)z(y)\right)}{dy}\frac{dy}{dx} = \left[\left(z'(y)\right)^2 + z''(y)z(y)\right]z(y) \tag{B5-3b}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

関数 $y(x)$ の n 階微分方程式 (B5-1) を関数 $z(y)$ の $n-1$ 階微分方程式

$$G\left(z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}\right) = 0 \tag{B5-4}$$

に変換し，階数を一つ下げることができる．

独立変数 x をすべて cx で置き換えたとき，微分方程式が不変であるならば，その微分方程式は変数 x に関して同次であるという．変数 x に関して同次の微分方程式は，変数変換

$$x = e^t \tag{B5-5}$$

により，$y(t)$ に関する，もとの微分方程式と同じ階の自律系微分方程式に変換することができる．

演習問題の解答

第 1 章（p. 19）

1-1

1-1-1

$$x^2-(1+\varepsilon)x+\varepsilon=(x-\varepsilon)(x-1)=0,\quad \varepsilon=0.01$$

摂動展開による近似解 $x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots$ を仮定すると，$x=0+\varepsilon\cdot 1+\varepsilon^2\cdot 0+\cdots$ および $x=1+\varepsilon\cdot 0+\varepsilon^2\cdot 0+\cdots$ を得る．これらは厳密解 $x=\varepsilon, x=1$ に一致している．

1-1-2

$$x^3-(1+\varepsilon)x+\varepsilon=(x-1)(x^2+x-\varepsilon)=0,\quad \varepsilon=0.01$$

摂動展開による近似解 $x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots$ を仮定すると，

$$x=0+\varepsilon\cdot 1+\varepsilon^2\cdot(-1)+\cdots$$

$$x=1+\varepsilon\cdot 0+\varepsilon^2\cdot 0+\cdots$$

$$x=-1+\varepsilon\cdot(-1)+\varepsilon^2\cdot 1+\cdots$$

を得る．これらは厳密解 $x=1$ および $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}$ を ε で摂動展開したものに一致している．

1-1-3 $f(x)=\sqrt{x^2+\varepsilon}+1-e^x$ は連続関数であり，$f(0)=\sqrt{\varepsilon}+1-e^0>0$.

$$f(x)\to-\infty,\ x\to+\infty,\quad f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+\varepsilon}}-e^x<0\qquad \text{（単調減少）}$$

であるから，正の実数解を一つのみもつ．

しかし，両辺を 2 乗した $x^2+\varepsilon=(e^x-1)^2$ の $x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots$, $x_0=0$ の形の摂動展開による近似解は不成功に終わる．そこで，与式の右辺をベキ級数展開すると，

$$x^2+\varepsilon=(e^x-1)^2=\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots\right)^2=x^2+x^3+\frac{7x^4}{12}+\cdots$$

すなわち，$\varepsilon=x^3+\dfrac{7x^4}{12}+\cdots$ を得る．

これから 1 次近似は $x_1=\sqrt[3]{\varepsilon}$ となるので，$\sqrt[3]{\varepsilon}$ による級数展開 $x=\sqrt[3]{\varepsilon}+\left(\sqrt[3]{\varepsilon}\right)^2 x_2+\cdots$ を仮定し，摂動展開の 2 次の項までの展開 $x=\sqrt[3]{\varepsilon}-\dfrac{7}{36}\left(\sqrt[3]{\varepsilon}\right)^2+\cdots$ を得る．

1-1-4

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4 + \cdots$$

を $x^2 - \varepsilon x - 1 = 0$ に代入すると

$$\left(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4 + \cdots\right)^2 - \varepsilon\left(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4 + \cdots\right) - 1 = 0$$

$$x_0^2 - 1 = 0, \quad x_0 = \pm 1$$

$$2x_0 x_1 - x_0 = 0, \quad x_1 = 1/2$$

$$2x_0 x_2 + x_1^2 - x_1 = 0, \quad x_2 = \pm 1/8$$

$$2x_0 x_3 + 2x_1 x_2 - x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

$$2x_0 x_4 + 2x_1 x_3 + x_2^2 - x_3 = 0, \quad x_4 = \mp 1/128$$

ゆえに

$$x = \pm 1 + \varepsilon/2 \pm \varepsilon^2/8 \mp \varepsilon^4/128 + O(\varepsilon^5)$$

その結果で $\varepsilon = 1$ とおくと

$$x \sim \pm 1 + 1/2 \pm 1/8 \mp 1/128 = 1.6172, \quad -0.6172$$

厳密解は

$$x = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)/2 = 1.6180, \quad -0.6180$$

実質的に 1 を 1 よりずっと小さいとみなして摂動法を遂行したことになるが，非常によい近似値を得ている．

1-2

1-2-1　微小パラメータ ε のベキ級数解

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \cdots$$

を仮定する．

$$y_0' = 0, \quad y_0(0) = 1 \quad \text{の解} \quad y_0(x) = 1$$

$$\text{一般項}\ y_k' + q(x) y_{k-1} = 0, \quad y_k(0) = 0$$

の解は数学的帰納法により，

$$y_k(x) = -\int_0^x q(s) \frac{1}{(k-1)!}\left(-\int_0^s q(t)dt\right)^{k-1} ds = \frac{1}{k!}\left(-\int_0^x q(t)dt\right)^k$$

摂動法による近似解は，厳密解を $-\varepsilon \int_0^x q(t)dt$ により級数展開したものである．

1-2-2　微小パラメータ ε のベキ級数解 $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \cdots$ を仮定すると（解法は巻末付録 B3 参照），

$$y_0(x) = \cos x$$

$$y_1(x) = \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{6}\cos 2x - \frac{1}{2}$$

$$y_2(x) = \frac{29}{144}\cos x + \frac{5}{12} x \sin x + \frac{1}{9}\cos 2x + \frac{1}{48}\cos 3x - \frac{1}{3}$$

1-3

1-3-1　$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \cdots$ を仮定する．

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \cdots\right) + \left(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \cdots\right)$$
$$+\varepsilon\left(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \cdots\right)^3 = 0$$

$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} y_0 + y_0 = 0$　の一般解は　$y_0 = A\exp(+it) + A^*\exp(-it)$

これを 1 次の式に代入すると，

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y_1 + y_1 = -y_0^3$$
$$= -A^3\exp(3it) - (A^*)^3\exp(-3it) - 3A^2A^*\exp(it) - 3A(A^*)^2\exp(-it)$$

の右辺に斉次方程式の解である $-3A^2A^*\exp(it) - 3A(A^*)^2\exp(-it)$ が現れた．それゆえ，y_1 の解には $t\exp(\pm it)$ に比例する永年項が現れる．

1-3-2　微小パラメータ ε のベキ級数解 $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \cdots$ を仮定する．

$$\varepsilon\frac{d^2}{dt^2}\left(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \cdots\right) + p(x)\frac{d}{dt}\left(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \cdots\right)$$
$$+q(x)\left(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \cdots\right) = 0$$

0 次の項：$p(x)y_0'(x) + q(x)y_0(x) = 0$

の一般解は

$$y_0(x) = A\exp\left(\int_x^1 \frac{q(t)}{p(t)}dt\right)$$

であるが，積分定数を一つしかもたないので，$y_0(0) = C$, $y_0(1) = D$ を両者とも満足することは一般に不可能である．

■ 第 2 章 (p. 46)

2-1

2-1-1　$f(x) \sim x^\alpha\ (0 < \alpha < 1)$, $x \to +\infty$ のとき，

$$f'(x) \sim \frac{\alpha}{x^{1-\alpha}} \to 0 \qquad x \to +\infty$$

したがって，偽である．

2-1-2

$$x^2y'' + (3x+1)y' + y$$
$$= \int_0^\infty \left[\frac{2(xt)^2}{(1+xt)^3} - \frac{(3x+1)t}{(1+xt)^2} + \frac{1}{1+xt}\right]e^{-t}dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\frac{te^{-t}}{(1+xt)^2}\right]dt = 0$$
$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}dt = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{k}(-xt)^n e^{-t}dt + \int_0^\infty \frac{(-xt)^{k+1}e^{-t}}{1+xt}dt$$
$$= \sum_{n=0}^{k}(-1)^n n!x^n + R_k$$

$$|R_k| = \left|\int_0^\infty \frac{(-xt)^{k+1}e^{-t}}{1+xt}dt\right| < \left|\int_0^\infty (xt)^{k+1}e^{-t}dt\right| = x^{k+1}(k+1)!$$

2-2

2-2-1　漸近関数列 $\{\varphi_m(x)\}$ により展開した級数 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(x)$ が $y(x)$ に漸近することは，級数 $\sum_{m=0}^{k} a_m\varphi_m(x)$ がすべての k について

$$y(x) - \sum_{m=0}^{k} a_m\varphi_m(x) \ll \varphi_k(x) \qquad x \to x_0 \tag{2-3-6}$$

を満たすことである．したがって，

$$\int_{x_0}^{x} y(t)dt - \sum_{m=0}^{k} a_m \int_{x_0}^{x} \varphi_m(t)dt \ll \int_{x_0}^{x} \varphi_k(t)dt$$

である．この関係式は，関数 $\int_{x_0}^{x} y(t)dt$ は，その積分が存在する限りにおいて漸近関数列 $\left\{\Phi_k(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi_k(t)dt\right\}$ により漸近級数展開できることを示している．

2-2-2　前問の結果より，

$$f'(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m \qquad x \to x_0$$

であるならば，

$$f(x) \sim f(x_0) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m+1}(x-x_0)^{m+1} \qquad x \to x_0$$

となる．ベキ級数による漸近級数展開は一意的に定まるので，両式は，$f(x)$ を項別微分して $f'(x)$ が得られることを示している．

2-3　$y(x) = \exp Q(x)$ とおくと

$$\left[Q''(x) + \left(Q'(x)\right)^2 + x^2 + 1\right]\exp Q(x) = \exp(x^2)$$

$Q(x)$ の主要部は x^2 である．

$$Q(x) = x^2 + R(x), \quad R(x) = o(x^2) \qquad x \to +\infty$$

$$\left[2 + R''(x) + 4x^2 + 4xR'(x) + \left(R'(x)\right)^2 + x^2 + 1\right]\exp R(x) = 1$$

カギカッコ内の卓越項は $[4x^2 + x^2]$ であるから，

$$\exp R(x) \sim \frac{1}{5x^2} \qquad x \to +\infty \quad ゆえに \quad y \sim \frac{\exp\left(x^2\right)}{5x^2} \qquad x \to +\infty$$

■ 第 3 章（p. 78）

3-1

3-1-1　残差 $|R_k| = \left|(-1)^k \int_x^\infty \frac{k!e^{x-t}}{t^{k+1}}dt\right| \le \left|\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} \int_x^\infty e^{x-t}dt\right| = \left|\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}\right|$

3-1-2

$$\int_0^1 ds\int_0^1 dt\exp(-xst)=\int_0^1 ds\left[\frac{\exp(-xst)}{-xs}\right]_0^1=\int_0^1 ds\left[\frac{1-\exp(-xs)}{xs}\right]$$
$$=\frac{1}{x}\int_0^x du\left[\frac{1-\exp(-u)}{u}\right]\sim\frac{1}{x}\int_1^x du\frac{1}{u}\sim\frac{\log x}{x}\qquad x\to+\infty$$

3-1-3

$$C(z)+iS(z)=\int_0^z\exp\left(i\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$$
$$=\left[t\exp\left(i\frac{\pi}{2}t^2\right)\right]_0^z-i\pi\int_0^z t^2\exp\left(i\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$$
$$=z\exp\left(i\frac{\pi}{2}z^2\right)-i\pi\int_0^z t^2\exp\left(i\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$$
$$=\left(z-\frac{i\pi z^3}{3}\right)\exp\left(i\frac{\pi}{2}z^2\right)+\frac{(-i\pi)^2}{3}\int_0^z t^4\exp\left(i\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$$
$$=\left(z+\frac{(-i\pi)z^3}{3}+\frac{(-i\pi)^2z^5}{3\cdot5}\right)\exp\left(i\frac{\pi}{2}z^2\right)+\frac{(-i\pi)^3}{3\cdot5}\int_0^z t^6\exp\left(i\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$$

ゆえに，数学的帰納法を用いて（変数 z をいったん実数とする）

$$C(z)=\mathrm{Re}\int_0^z\exp\left(i\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{1\cdot3\cdot5\cdots(4n+1)}z^{4n+1}+\sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdots(4n+3)}z^{4n+3}$$
$$S(z)=\mathrm{Re}\frac{1}{i}\int_0^z\exp\left(i\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$$
$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdots(4n+3)}z^{4n+3}+\sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{1\cdot3\cdot5\cdots(4n+1)}z^{4n+1}$$

最終結果において変数 z を複素平面に解析接続する．

3-2

3-2-1　前半は，式 (3-2-10) を導いた際の論証の通り．
後半は，式 (3-2-18) を導いた際の論証において，最大値をとる点 c が端点である場合である．

3-2-2

$$I(x)=\int_0^c f(t)\exp(-xt)dt\sim\int_0^\varepsilon f(t)\exp(-xt)dt$$
$$\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_0^\varepsilon t^{\nu+\mu k}\exp(-xt)dt\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_0^\infty t^{\nu+\mu k}\exp(-xt)dt$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\Gamma(\nu+\mu k+1)}{x^{\nu+\mu k+1}}\qquad x\to+\infty$$

3-2-3

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{t}e^{x\log t}dt\qquad x\to+\infty$$

において，$\varphi(t)=\log t$，$f(t)=e^{-t}/t$ とおくと，$\varphi(t)$ は $t\to+\infty$ で最大 ($+\infty$) となり，このままではラプラスの方法を適用できない．

$x \to +\infty$ の極限において積分 $\Gamma(x)$ の被積分関数 $\exp[(x-1)\log t - t]$ は

$$\frac{d}{dt}\exp[(x-1)\log t - t] = 0$$

すなわち，$t = x-1$ で最大値をとるが，この点は x に依存する．そこで，$x \to +\infty$ を考慮し，変数変換 $t = ux$ を施すと，

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x^x \int_0^\infty \frac{1}{u}\exp[x(\log u - u)]\,du \qquad x \to +\infty$$

となり，$\varphi(u) = \log u - u$ である．このとき $\varphi(u)$ が最大値をとる点 $u=1$ は x に依存しない．ゆえに，式 (3-2-18) より，

$$\Gamma(x) \sim (x/e)^x\sqrt{2\pi/x} \qquad x \to +\infty$$

3-3-1　まず，$f(t)$ が区分的に一定値をとる階段関数

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\chi[a_k, b_k]$$

のときに成立することを示す．

$$\left|\int_a^b f(t)\cos xt\,dt\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k} c_k\cos xt\,dt\right| = \frac{1}{x}\left|\sum_{k=1}^{n} c_k(\sin xb_k - \sin xa_k)\right|$$
$$< \frac{2n}{x}|\mathrm{Max}(c_k)| \to 0 \qquad x \to +\infty$$

次に，積分可能な関数 $f(t)$ には，任意の ε に対して

$$\int_a^b \left[f(t) - \sum_{k=1}^{n} c_k\chi[a_k, b_k]\right]dt < \varepsilon$$

を満足する階段関数が存在することを用いると，

$$\int_a^b f(t)\cos xt\,dt$$
$$= \int_a^b \left[f(t) - \sum_{k=1}^{n} c_k\chi[a_k, b_k]\right]\cos xt\,dt + \int_a^b \sum_{k=1}^{n} c_k\chi[a_k, b_k]\cos xt\,dt \to 0 \qquad x \to +\infty$$

3-3-2

(1) $$\int_0^1 \cosh t\exp(ixt^3)dt \sim \frac{\Gamma(1/3)}{3\sqrt[3]{x}}\exp(i\pi/6) \qquad x \to +\infty$$

(2) $$\int_0^{2\pi} \cos\left(x(t-\pi)^2\right)\exp(-t)dt \sim \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ixu^2)\exp(-u-\pi)du\right] \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-\pi} \qquad x \to +\infty$$

(3) $$\int_0^{2\pi} \cos\left(x(t-\pi)^3\right)\cosh t^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(xu^3)\cosh(u+\pi)^2 du$$
$$\sim \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ixu^3)\cosh(u+\pi)^2 du\right] \sim \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x}}\cosh\pi^2 \qquad x \to +\infty$$

(4) $$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos(x\sin^2 t)dt \sim \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos(xt^2)dt \sim \int_{-\infty}^{\infty}\cos(xt^2)dt$$
$$= \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ixt^2)dt\right] \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \qquad x \to +\infty$$

3-4

3-4-1 関数が複素平面上の閉曲線 C およびその内部において正則であれば，その閉曲線に沿う線積分は 0 である（コーシーの積分定理）から，正則関数 $\exp(-\pi z^2/2)$ の図 3-7 中の閉曲線 $\{C=C_1+C_2+C_3\}$ に沿う線積分は 0 である．ここに R は十分大きい正の実数，$\theta=\pi/4$ である．

$$\int_{C_1}\exp(-\pi z^2/2)dz+\int_{C_2}\exp(-\pi z^2/2)dz+\int_{C_3}\exp(-\pi z^2/2)dz=0$$

C_2 上では $z=Re^{i\theta}, 0<\theta<\pi/4$ であり，

$$\exp\left(-\pi z^2/2\right)=\exp\left(-\pi R^2e^{2i\theta}/2\right)=\exp\left(-\pi R^2\cos 2\theta/2\right)\exp\left(-i\pi R^2\sin 2\theta/2\right)$$

$\cos 2\theta>0$ ゆえ，$R\to+\infty$ の極限で C_2 に沿う積分は消える．

$$\int_{C_2}\exp\left(-\pi z^2/2\right)dz$$
$$=\int_0^{\pi/4}\exp\left(-\pi R^2\cos 2\theta/2\right)\exp\left(-i\pi R^2\sin 2\theta/2+i\theta\right)iRd\theta\to 0\qquad R\to+\infty$$

したがって，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}\exp\left(-\pi z^2/2\right)dz=-\lim_{R\to\infty}\int_{C_3}\exp\left(-\pi z^2/2\right)dz$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty\exp\left(-i\pi R^2/2\right)dR=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\lim_{R\to\infty}[C(R)-iS(R)]$$

ゆえに，

$$C(R)=\int_0^R\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt\to\frac{1}{2}\qquad R\to+\infty$$

$$S(R)=\int_0^R\sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt\to\frac{1}{2}\qquad R\to+\infty$$

3-4-2 実軸の 0 と π から虚数軸正方向に積分径路（等位相径路）を作る．

$$t=u+iv,\quad u=0,\pi$$

$$\int_0^\pi\frac{t\exp(ixt)}{\sqrt{\sin t}}dt\sim\int_0^\infty\frac{iv\exp(-xv)}{\sqrt{\sin iv}}idv-\int_0^\infty\frac{(\pi+iv)\exp(ix\pi-xv)}{\sqrt{\sin(\pi+iv)}}idv\qquad x\to+\infty$$

右辺第 1 項は $O(1/x)$ であるから，

$$\int_0^\pi\frac{t\exp(ixt)}{\sqrt{\sin t}}dt\sim-i\pi\exp(ix\pi)\int_0^\varepsilon\frac{\exp(-xv)}{\sqrt{-iv}}dv\sim-i\pi\exp(ix\pi)\int_0^\infty\frac{\exp(-xv)}{\sqrt{-iv}}dv$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{ix}}\exp(ix\pi)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi^3}{ix}}\exp(i\pi x)\qquad x\to+\infty$$

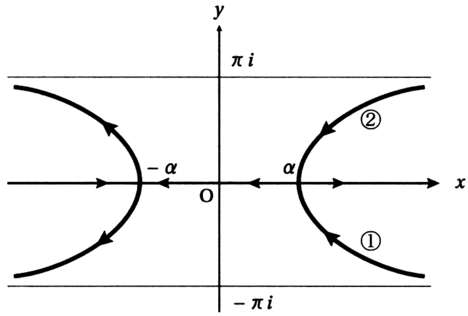
3-4-3

$$\varphi(z)=\frac{\sinh z}{\cosh\alpha}-z$$

鞍点 z_0 は $\varphi'(z_0)=\dfrac{\cosh z_0}{\cosh\alpha}-1=0$ の解すなわち，$z_0=\pm\alpha+2n\pi i$（n：整数）である．
鞍点 $\pm\alpha$ を通る等位相線 $z=u+iv$ は

$$v=0\ \ (u\text{ 軸})\quad\text{および}\quad\cosh u=v\cosh\alpha/\sin v$$

解答図 1 は鞍点を通る等位相線と実部 $\varphi_r(z)$ の増加方向（矢印）を示す．



解答図 1

それゆえ，積分径路 C を，$\infty - i\pi$ から出発し鞍点 $(z_0 = \alpha)$ に至る等位相線①と，鞍点 $(z_0 = \alpha)$ から出発し $\infty + i\pi$ に至る等位相線②の二つを接続したものとすればよい．

積分への寄与は鞍点近傍に限定されるので，等位相線①および等位相線②（いずれも実軸と直交する）上の積分変数 z をそれぞれ

$$z = \alpha - is \quad (\text{①上}), \qquad z = \alpha + is \quad (\text{②上}) \qquad s \to 0+$$

とおくことができる．

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{\sinh z}{\cosh\alpha} - z \\ &\sim \left(1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{24} + \cdots\right)\tanh\alpha \pm i\left(s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} + \cdots\right) - (\alpha \pm is) \\ &\sim \tanh\alpha - \alpha - \frac{s^2}{2}\tanh\alpha \qquad s \to 0+\end{aligned}$$

これらの結果を用い，

$$J_n(n/\cosh\alpha) \sim \frac{1}{2\pi i}\exp n(\tanh\alpha - \alpha)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\exp\left(-\frac{ns^2}{2}\tanh\alpha\right) i\,ds \qquad n \to +\infty$$

を得，さらに，積分の上下限 ε を ∞ に置き換えると，

$$\begin{aligned}J_n(n/\cosh\alpha) &\sim \frac{1}{2\pi}\exp n(\tanh\alpha - \alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{ns^2}{2}\tanh\alpha\right) ds \qquad n \to +\infty \\ &= \frac{\exp n(\tanh\alpha - \alpha)}{\sqrt{2\pi n\tanh\alpha}}\end{aligned}$$

3-4-4　n 次の鞍点 $\varphi'(z_0) = \varphi''(z_0) = \cdots = \varphi^{(n)}(z_0) = 0,\ \varphi^{(n+1)}(z_0) \neq 0$ の近傍で解析関数 $\varphi(z)$ は $\varphi(z) = \varphi(z_0) + C(z - z_0)^{n+1} + o(z - z_0)^{n+1}$ とテイラー展開できるので，等位相線は $\mathrm{Im}\left[C(z - z_0)^{n+1}\right] = 0$ を満たす．

$$z - z_0 = K\exp(i\theta) \quad (K, \theta：\text{実数}), \qquad C = D\exp(i\varphi) \quad (D, \phi：\text{実数})$$

とおくと，

$$\mathrm{Im}\left[C(z - z_0)^{n+1}\right] = DK^{n+1}\sin\left[(n+1)\theta + \varphi\right] = 0$$

その解は $\theta = (m\pi - \varphi)/(n+1)$, $(m = 0, 1, \ldots, n)$．ゆえに n 次の鞍点では $n+1$ 本の等位相線が交わる．

■第 4 章（p. 119）

4-1　本境界層問題は，2 階微分方程式の境界値問題

$$\varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\quad 0 \le x \le 1,\quad p(x) > 0,\quad y(0) = C, y(1) = D \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

において，$p(x) = (x+1)^2$, $q(x) = 1, C = D = 1$ とおいたものである．ゆえに統一解 (4-2-14) は

$$y_u(x) = y_b(x) + y_o(x) - y_m(x) = \left(1 - \sqrt{e}\right)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \exp\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{x+1}\right)$$

4-2　内部境界層を有する微分方程式 (4-4-1〜3) に当てはめると，$\mu = 1, \nu = -1, C = -1, D = 2.$ また，$p(s) = s,\ q(s) = -1$ であるから，統一解 (4-4-22) は，

$$y_u(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}\exp\left(-x^2/(4\varepsilon)\right)\cdot\left(-U\left(3/2, \sqrt{1/\varepsilon}x\right) + 2U\left(3/2, -\sqrt{1/\varepsilon}x\right)\right)$$

4-3　微分方程式の y' の係数が負であるから，その解は $x = 1$ の近傍に唯一の境界層をもつ．外域の近似微分方程式は

$$-2y_o' + \frac{1}{y_o} = 0,\quad 0 \le x,\quad y_o(0) = 1$$

であり，その解は $y_o = \sqrt{x+1}.$

境界層内 $(1 - x = O(\delta))$ における精度よい近似微分方程式は，

$$\varepsilon y_b'' - 2y_b' = 0,\quad y_b(1) = 2$$

であり，その解は $y_b(x) = (2 - B)\exp\dfrac{2(x-1)}{\varepsilon} + B.$

漸近接続　　x が中間区間内にあるとき，両者は

$$y_b(x) \sim B,\quad y_o(x) \sim \sqrt{2}$$

ゆえに $B = \sqrt{2}.$

$$y_b(x) \sim (2 - \sqrt{2})\exp\left(\frac{2(x-1)}{\varepsilon}\right) + \sqrt{2},\quad 1 - x = O(\varepsilon)$$

統一解　　$y_u(x) \sim (2 - \sqrt{2})\exp\left(\dfrac{2(x-1)}{\varepsilon}\right) + \sqrt{x+1}$

4-4　$x = 0$ の近傍に境界層（厚さ δ）の存在を仮定し，内変数 t

$$x = \delta t$$

を導入し，これを独立変数とすると，

$$y(x) \equiv z(t)$$

(1) 微分方程式は

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2}\frac{d^2z}{dt^2} + \delta^{\alpha-1}t^\alpha\frac{dz}{dt} + z = 0 \qquad \varepsilon \to 0+$$

卓越平衡の可能性は

(a) $\dfrac{\varepsilon}{\delta^2} = O\left(\delta^{\alpha-1}\right) \quad\to\quad \delta = O\left(\varepsilon^{1/(\alpha+1)}\right) \quad (-1 < \alpha < 1)$

(b) $\dfrac{\varepsilon}{\delta^2} = O(1) \quad\to\quad \delta = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \quad (1 \le \alpha)$

(2) 微分方程式は

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2}\frac{d^2z}{dt^2}+\delta^{-1}\frac{dz}{dt}-\delta^{\alpha}t^{\alpha}z=0 \quad \varepsilon\to 0+$$

卓越平衡の可能性は

(a) $\dfrac{\varepsilon}{\delta^2}=O(\delta^{\alpha}) \quad \to \quad \delta=O\left(\varepsilon^{1/(\alpha+2)}\right) \quad (-2<\alpha<-1)$

(b) $\dfrac{\varepsilon}{\delta^2}=O(\delta^{-1}) \quad \to \quad \delta=O(\varepsilon) \quad (-1\le\alpha)$

4-5 式 (4-4-22) から境界層内の解 (4-4-13) を引くと

$$\begin{aligned}y_u(x)-y_b(x) &= \frac{\Gamma(-\nu/\mu+1)}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{\mu/\varepsilon}\right)^{\nu/\mu}\exp\left(-\mu x^2/(4\varepsilon)\right)\\
&\cdot\left(C\left[\exp\left\{-\int_{-1}^{x}\left[\frac{q(s)}{p(s)}-\frac{\nu}{\mu s}\right]ds\right\}-\exp\left\{-\int_{-1}^{0}\left[\frac{q(s)}{p(s)}-\frac{\nu}{\mu s}\right]ds\right\}\right]U\left(1/2-\nu/\mu,x\sqrt{\mu/\varepsilon}\right)\right.\\
&\left.+D\left[\exp\left\{\int_{x}^{1}\left[\frac{q(s)}{p(s)}-\frac{\nu}{\mu s}\right]ds\right\}-\exp\left\{\int_{0}^{1}\left[\frac{q(s)}{p(s)}-\frac{\nu}{\mu s}\right]ds\right\}\right]U\left(1/2-\nu/\mu,-x\sqrt{\mu/\varepsilon}\right)\right)\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}y_u(x)-y_b(x) &\sim C\exp\left(-\int_{-1}^{x}\frac{q(s)}{p(s)}ds\right)-C(-x)^{-\mu/\nu}\exp\left(-\int_{-1}^{0}\left[\frac{q(s)}{p(s)}-\nu/(\mu s)\right]ds\right)\\
&\sim y_{o-}(x)-y_{m-}(x) \qquad x<0, \quad \varepsilon\to 0+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_u(x)-y_b(x) &\sim D\exp\left(\int_{x}^{1}\frac{q(s)}{p(s)}ds\right)-Dx^{-\mu/\nu}\exp\left(\int_{0}^{1}\left[\frac{q(s)}{p(s)}-\nu/(\mu s)\right]ds\right)\\
&\sim y_{o+}(x)-y_{m+}(x) \qquad x>0, \quad \varepsilon\to 0+\end{aligned}$$

■ 第 5 章（p. 149）

5-1 式 (5-3-7) は

$$y(x)\sim(ax+b)\left[C_1\exp\left(\frac{-1}{\varepsilon a(ax+b)}\right)+C_2\exp\left(\frac{1}{\varepsilon a(ax+b)}\right)\right] \qquad \varepsilon\to 0+$$

ゆえに，

$$\varepsilon^2y''(x)=A(x)y(x)$$

を満たす．

$$Q_0(x)=\mp\frac{1}{a(ax+b)}$$

$$Q_1(x)=\log(ax+b)+C$$

$$\pm\frac{1}{(ax+b)^2}Q_2'+\frac{-a^2}{(ax+b)^2}+\frac{a^2}{(ax+b)^2}=0$$

から $Q_2'(x)=0$．

数学的帰納法により $Q_k'(x)=0,\ k\ge 2$．すなわち，WKB 法による摂動展開の高次の項はすべて係数 C_1，C_2 に吸収される．

5-2

$$Q_2(x)=\pm\int^{x}\left[\frac{A''(t)}{8A(t)^{3/2}}-\frac{5(A'(t))^2}{32A(t)^{5/2}}\right]dt$$

$$Q_3(x) = -\frac{A''(x)}{16A(x)^2} + \frac{5(A'(x))^2}{64A(x)^3}$$

5-3　相対誤差は $\exp\left(\varepsilon^2 Q_3(x)\right) - 1$, $\varepsilon \to 0+$ と見積もることができる．

$$Q_3(x) = -\frac{A''(x)}{16A(x)^2} + \frac{5(A'(x))^2}{64A(x)^3} = -\frac{2}{16(x+1)^4} + \frac{20(x+1)^2}{64(x+1)^6} = \frac{3}{16(x+1)^4}$$

$$\exp\left(\varepsilon^2 Q_3(x)\right) \le \exp\left(\frac{3\varepsilon^2}{16}\right) \le 1.001, \quad \varepsilon \le 4\sqrt{\frac{\log 1.001}{3}} = 0.073$$

5-4　区間 A では，$A(x) < 0$ であるから，

$$\int_0^x \sqrt{A(t)}\,dt = -\int_x^0 i\sqrt{-A(t)}\,dt = \exp\left(\frac{3\pi}{2}i\right)\int_x^0 \sqrt{|A(t)|}\,dt$$

ゆえに $\left[\frac{3}{2\varepsilon}\int_0^x \sqrt{A(t)}\,dt\right]^{2/3}$ は絶対値の大きい負の実数である．したがって漸近級数展開

$$Ai(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-t)^{-1/4}\sin\left(\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \qquad t \to -\infty \tag{5-6-37}$$

を用いることができ，

$$\begin{aligned}
&y_{unif}(x) \\
&\sim \sqrt{\pi}C\left[\frac{3}{2\varepsilon}\exp\left(\frac{3\pi}{2}i\right)\int_x^0 \sqrt{|A(t)|}\,dt\right]^{1/6}(-|A(t)|)^{-1/4} \\
&\quad\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\left(\frac{3}{2\varepsilon}\int_x^0 \sqrt{|A(t)|}\,dt\right)^{2/3}\right]^{-1/4}\sin\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2\varepsilon}\int_x^0 \sqrt{|A(t)|}\,dt\right) + \frac{\pi}{4}\right] \\
&\sim C|A(x)|^{-1/4}\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_x^0 \sqrt{|A(t)|}\,dt + \frac{\pi}{4}\right) \sim y_A(x) \qquad \varepsilon \to 0+
\end{aligned}$$

区間 B では，$A(x) \sim ax$ ゆえに

$$\begin{aligned}
y_{unif}(x) &\sim \sqrt{\pi}C\left(\frac{3}{2\varepsilon}\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}\right)^{1/6}(ax)^{-1/4}Ai\left[\left(\frac{3}{2\varepsilon}\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}\right)^{2/3}\right] \\
&= \sqrt{\pi}C(\varepsilon a)^{-1/6}Ai(\varepsilon^{-2/3}a^{1/3}x) \sim y_B(x) \qquad \varepsilon \to 0+
\end{aligned}$$

区間 C では，

$$Ai(t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}t^{-1/4}\exp\left(-(2/3)t^{3/2}\right) \qquad t \to +\infty \tag{5-6-27a}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
y_{unif}(x) &\sim \sqrt{\pi}C\left[\frac{3}{2\varepsilon}\int_0^x \sqrt{A(t)}\,dt\right]^{1/6}\left(A(x)\right)^{-1/4} \\
&\qquad\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{3}{2\varepsilon}\int_0^x \sqrt{A(t)}\,dt\right)^{(2/3)(-1/4)}\exp\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2\varepsilon}\int_0^x \sqrt{A(t)}\,dt\right)\right] \\
&\sim \frac{1}{2}CA(x)^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \sqrt{A(t)}\,dt\right) \sim y_C(x) \qquad \varepsilon \to 0+
\end{aligned}$$

5-5　$A(x) = O(x^n)$ とおくと，$Q_1 = O(\log x)$, $Q_2 = O(x^{-(n+2)/2})$．$x \to \pm\infty$

$$Q_1 \gg \delta Q_2 \quad \text{かつ} \quad \delta^1 Q_2(x) \ll 1 \qquad \delta \to 0+$$

のためには $n > -2$.

第 6 章（p. 178）

6-1　振幅が小さいので $\theta \equiv \varepsilon\varphi$ とおき，$\sin(\varepsilon\varphi)$ のテイラー展開の第 2 項まで残し，変数変換 $u = t\sqrt{g/l}$ を施すと与式はダフィン方程式

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + \varphi + \frac{-\varepsilon^2}{6}\varphi^3 = 0$$

となる．ダフィン方程式の第 3 項の係数が負であるが，この場合も解の有界性が保証される．したがって，複スケール解析による近似解の主要部 φ_0 は式 (6-3-15) より，

$$\varphi_0 = 2R_0 \cos\left[\alpha + \left(1 + \frac{3}{2}R_0^2\frac{-\varepsilon^2}{6}\right)u\right]$$

もとの変数 t, θ にもどすと，

$$\theta_0 \equiv \varepsilon\varphi_0 = A\cos\left[\alpha + \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 - \frac{A^2}{16}\right)t\right], \quad A = 2\varepsilon R_0$$

振幅が大きくなるとともに振動数が減少し，周期 $T \sim 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{A^2}{16}\right)$ が増大する．

6-2

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2\right] = -\varepsilon y^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \leq 0$$

ゆえに，$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2$ は時間の経過によって増加しないので，

解 y および dy/dt は有界である．

複スケール解析の一般的な手法 (1-2-13),(6-2-1) を用いる．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_1} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_2}\right) + \cdots\right)(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots)$$
$$+ (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots) + \varepsilon(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots)^2$$
$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots\right)(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots) = 0$$

ダフィン方程式で用いた方法に沿って，近似解の主要部

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{t_1 + C}}\exp(i(t + \theta_0)) + \frac{1}{\sqrt{t_1 + C}}\exp(-i(t + \theta_0)) = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon t + C}}\cos(t + \theta_0)$$

を得る．

初期条件，$y(0) = 0, y'(0) = 1$ を課すと，

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon t/4}}\sin t$$

を得る．

6-3　前問とは非線形項が大分異なるが，ほとんど同じ解析をすることにより，解の主要部

$$y_0 \sim \frac{2}{\sqrt{3\varepsilon t + C}}\cos(t + \theta_0)$$

を得る．この一般解に初期条件，$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ を課すと，

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + 3\varepsilon t/4}}\sin t$$

非線形項が大分異なるにもかかわらず，解そのものは前問とよく似ている．

6-4 独立変数を x から t に変換し，$x=\varepsilon t$．変数 t を複スケール解析の基本変数にする．そのとき，微分方程式 (4-5-1) は

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+\varepsilon y^2=0$$

となる．

以下，複スケール解析の恒例の手順に従い，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_1}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}+2\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_2}\right)+\cdots\right)(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots)$$

$$+\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2}+\cdots\right)(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots)\right]+\varepsilon\left(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots\right)^2=0$$

を得る．式中の ε に関する次数の等しい項をまとめると，

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2}+\frac{\partial y_0}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}+\frac{\partial y_1}{\partial t}=-2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t\partial t_1}-\frac{\partial y_0}{\partial t_1}-y_0^2,\ \cdots$$

と続く漸化式を得る．これから

$$y_o=A(t_1,\cdots)+B(t_1,\cdots)\exp(-t)$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}+\frac{\partial y_1}{\partial t}=-\left(\frac{\partial A}{\partial t_1}+A^2\right)-\left(2AB-\frac{\partial B}{\partial t_1}\right)\exp(-t)-B^2\exp(-2t)$$

右辺第 1 項（変数 t に関して定数）と，右辺第 2 項（$\exp(-t)$ に比例する項）は斉次方程式の解である．このうち第 1 項の定数が 0 でない場合には，解 $y_1(t)$ に変数 t に比例する永年項が現れる．それゆえ，$\partial A/\partial t_1+A^2=0$ でなければならず，$A(t_1,\cdots)=1/(t_1+C)$ を得る．

なお第 2 項 $\exp(-t)$ は永年項をもたらさない．その結果，主要部の解

$$y_o\sim\frac{1}{t_1+C}+B(t_1,\ldots)\exp(-t)$$

を得る．変数を t から，もとの方程式 (4-2-1) の変数 $x=t_1=\varepsilon t$ にもどすと，

$$y_o\sim\frac{1}{x+C}+B(x,\ldots)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

右辺第 2 項の $\exp(-x/\varepsilon)$ は $x=O(1)$ で急激に減衰する関数であるから，関数 $B(x,\ldots)$ を $B(0,\ldots)=B_1$ で置き換えることができ，一般解

$$y_o\sim\frac{1}{x+C}+B_1\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

を得る．

ここで，境界条件 $y(0)=0, y(1)=2$ を課すと，最終的に，

$$y_o\sim\frac{1}{x-1/2}+2\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

を得る．これは非線形境界層問題 (4-5-1) の統一解 $y_u(x)$ (4-5-11) に一致している．

非線形項 y^2 が y^n（n：正の整数）に変わるとき，永年項を抑える条件は

$$\frac{\partial A}{\partial t_1}+A^n=0$$

であり

$$A(t_1,\cdots)=\frac{1}{\sqrt[n-1]{(n-1)(t_1+C)}}$$

となるので，その一般解は

$$y_o\sim\frac{1}{\sqrt[n-1]{(n-1)(x+C)}}+B_1\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

である．

6-5　外域においては $\frac{1}{x}$ および $\frac{1}{1-x}$ が $O(1)$ である．ゆえに，式 (6-7-23) において，

$$\sqrt{x}\frac{1-x}{\varepsilon}-\sqrt{x\frac{1-x}{\varepsilon}\left(x+\frac{1-x}{\varepsilon}\right)}=-\frac{1}{2}x^{3/2}+O(\varepsilon)\qquad\varepsilon\to0+$$

$$x^{3/2}\log\left(\sqrt{\frac{1-x}{\varepsilon x}}+\sqrt{1+\frac{1-x}{\varepsilon x}}\right)-\frac{1}{2}x^{3/2}\log(1-x)+\frac{1}{2}x^{3/2}\log\left(\frac{\varepsilon x}{4}\right)=o(\varepsilon)\qquad\varepsilon\to0+$$

内域においては，$u=(1-x)/\varepsilon=O(1)$，$s=1-(1-x)=1-\varepsilon u$.

ゆえに，式 (6-7-22) において，第 1 項でのみ，$s=1-\varepsilon u$ とし，ε のかかっているカギカッコ内では，$s=1$ とおくことができる．

■ 第 7 章 (p. 216)

7-1

$$\eta=Ae^{ikx}\tag{7-4-7}$$

$$\phi=B(z)e^{ikx}$$

とおき，支配方程式 (7-4-2) に代入すると

$$\left(-k^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)B(z)=0$$

その一般解

$$B(z)=C_1\exp(kz)+C_2\exp(-kz)$$

に海底境界条件 (7-4-3) を課すと，

$$B(z)=C\cosh k(z+h)$$

さらに，水面境界条件 (7-4-4,7) を課すと，

$$\phi=-\frac{igA}{\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}e^{ikx}\tag{7-4-8}$$

これを式 (7-4-6) に代入すると，分散関係式

$$\omega^2=gk\tanh kh\tag{7-4-10}$$

を得る．

7-2　式 (7-4-10) より

$$2\omega\frac{d\omega}{dk}=g\tanh kh+gkh\frac{1}{\cosh^2 kh}$$

ゆえに

$$\frac{d\omega}{dk}=\frac{g}{2\omega}\tanh kh+\frac{gkh}{2\omega}\frac{1}{\cosh^2 kh}=\frac{\omega}{2k}\left(1+\frac{gk}{\omega^2\cosh kh}\frac{kh}{\cosh kh}\right)$$
$$=\frac{\omega}{2k}\left(1+\frac{1}{\sinh kh}\frac{kh}{\cosh kh}\right)=\frac{\omega}{2k}\left(1+\frac{2kh}{\sinh 2kh}\right)$$

7-3

$$\text{運動エネルギー}=\left\langle\frac{\rho}{2}\int_{-h}^{\xi}(\nabla\varphi)^2\,dz\right\rangle\cong\left\langle\frac{\rho}{2}\int_{-h}^{0}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]dz\right\rangle$$

$\langle \mathrm{Re}\,(Ae^{-i\omega t})^2\rangle=\frac{1}{2}|A|^2$ を用いて

$$\left\langle\frac{\rho}{2}\int_{-h}^{0}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]dz\right\rangle$$
$$=\frac{\rho}{4}\left(\frac{gkA}{\omega\cosh kh}\right)^2\int_{-h}^{0}\left[\cosh^2 k(z+h)+\sinh^2 k(z+h)\right]dz=\frac{\rho}{4}gA^2\frac{gk\tanh kh}{\omega^2}=\frac{1}{4}\rho gA^2$$

$$\text{位置エネルギー}=\left\langle\int_0^{\xi}\rho gz\,dz\right\rangle=\frac{1}{2}\rho g\langle\xi^2\rangle=\frac{1}{4}\rho gA^2$$

ゆえに,

$$E\equiv\left\langle\frac{\rho}{2}\int_{-h}^{\xi}(\nabla\varphi)^2\,dz+\int_0^{\xi}\rho gz\,dz\right\rangle=\frac{1}{2}\rho gA^2$$

7-4

$$(\psi_0)^2=-\left(\frac{gA}{\omega}\right)^2\frac{\cosh^2 k(z+h)}{\cosh^2 kh}=-\left(\frac{gA}{\omega}\right)^2\frac{1+\cosh 2k(z+h)}{2\cosh^2 kh}$$
$$\int_{-h}^{0}(\psi_0)^2dz=-\left(\frac{gA}{\omega}\right)^2\int_{-h}^{0}\frac{1+\cosh 2k(z+h)}{2\cosh^2 kh}dz=-\left(\frac{gA}{\omega}\right)^2\frac{2kh+\sinh 2kh}{4k\cosh^2 kh}$$

式 (7-4-8) を用いて

$$=-\frac{gA^2}{2k^2}\frac{2kh+\sinh 2kh}{2\sinh kh\cosh kh}=\frac{2}{\rho k}\frac{\rho gA^2}{2\omega}\frac{\omega}{2k}\left(1+\frac{2kh}{\sinh 2kh}\right)=\frac{2}{\rho k}\frac{E}{\omega}\frac{d\omega}{dk}=\frac{2}{\rho}\frac{E}{\omega}\frac{C_g}{k}$$

また

$$\frac{\omega}{g}\left[(\psi_0)^2\right]_{z=0}=\frac{2}{\rho}\frac{\rho gA^2}{2\omega}=\frac{2}{\rho}\frac{E}{\omega}$$

7-5　式 (7-1-2),(7-2-5) で $w=\partial\varphi/dz=0$ としたものより

$$0=\int_{-h}^{\zeta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz=\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta}u\,dz-u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta}v\,dz-v\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$
$$=\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta}u\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta}v\,dz\sim\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}+\frac{\partial hv}{\partial y}\qquad \zeta/h\to 0$$

7-6　二つの異なる「長さスケール」λ と $\varepsilon\lambda$ があるので，開口部の中心である原点からの距離 r にもとづき，**外域**（$r=O(\lambda)$）と**内域**（$r=O(\varepsilon\lambda)$）に海域全体を分割し，それぞれにおける解を求める．

[外域]

外域の散乱波 η_S は

$$\eta_S^{\pm}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[H_{2n}^{(1)}(kr)C_{2n}^{(1)\pm}\cos 2n\theta+H_{2n+1}^{(1)}(kr)S_{2n+1}^{(1)\pm}\sin(2n+1)\theta\right]\qquad(7\text{-}8\text{-}16)$$

となる．± は外洋 (+) と港内 (−) を表す．

外域のうち，港内の解は散乱波 η_S^- そのもの，

$$\eta_{o-}=\eta_S^-=\sum_{n=0}^{\infty}\left[H_{2n}^{(1)}(kr)C_{2n}^{(1)-}\cos 2n\theta+H_{2n+1}^{(1)}(kr)S_{2n+1}^{(1)-}\sin(2n+1)\theta\right]$$

であり，外洋の解は散乱波 η_S^+ に入射波 $\eta_I=Ae^{-ikx}$ および直線状の完全反射防波堤による反射波 $\eta_R=Ae^{+ikx}$ を加えたものとなる．

$$\eta_{o+}=(\eta_I+\eta_R)+\eta_S^+=2A\cos kx+\eta_S^+ \tag{7-8-18}$$

[内域]

水位の振幅 $\eta_i(x,y)$ の支配方程式はラプラス方程式

$$\frac{\partial^2\eta_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta_i}{\partial y^2}=0 \tag{7-8-19}$$

である．複素ポテンシャルの等角写像法を用いる．変数変換

$$z=x+jy=-\frac{j\varepsilon\lambda}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$$

により図 7-11(b) のように各点を対応させつつ，複素 z 平面の境界を複素平面 w の上半面に写像することができる．

w 平面の単純な防波堤境界条件を満足する変数 w の解析関数のうち $O(\varepsilon)$ の精度で漸近接続を可能にする解は次式である

$$\Phi(z)=\hat{\Phi}(w)=D\log w+F \tag{7-8-22b}$$

[漸近接続 1　港内側]

外域解 η_{o-} の級数展開のうち $H_0^{(1)}(kr)$ のみ残したものが $O(\varepsilon)$ の精度で内域解との漸近接続に成功する．その中間極限は，$H_0^{(1)}(kr)$ の $kr\to 0$ の極限を用いると（巻末付録 A 式 (A1-2a,c)），

$$\eta_{o-}\sim C_0^{(1)-}\left(1+\frac{2i}{\pi}\log\frac{\gamma kr}{2}\right)\qquad (x<0)\qquad kr\to 0$$

となる．

次に内域解 $\eta_i(x,y)$ の中間極限をとる．

上の変換および図 7-11(b) の対応関係によれば，この極限操作は w 平面における $w\to 0$ の極限に対応する．この極限において，

$$w\sim\left(\frac{2j}{\varepsilon\lambda}z\right)^{-1}\qquad (x<0)\qquad r/(\varepsilon\lambda)\to+\infty$$

を得ることに注意すると，内域解 $\eta_i(x,y)$ の中間極限は

$$\eta_i(x,y)\sim \mathrm{Re}\left[D\log\left(\frac{2j}{\varepsilon\lambda}z\right)^{-1}+F\right]=-D\log\frac{2r}{\varepsilon\lambda}+F\qquad (x<0)\qquad r/(\varepsilon\lambda)\to+\infty$$

となる．

次の 2 条件

$$\frac{2i}{\pi}C_0^{(1)-}=-D,\quad C_0^{(1)-}\left(1+\frac{2i}{\pi}\log\frac{\gamma k}{2}\right)=-D\log\frac{2}{\varepsilon\lambda}+F$$

を満たすとき，η_{o-} と η_i の中間極限は恒等的に一致し，漸近接続に成功する．

[漸近接続2 外洋側]

外域解 η_{o+} の級数展開のうち同じく $H_0^{(1)}(kr)$ のみを残す．$H_0^{(1)}(kr)$ の $kr \to 0$ の極限を用いると，その中間極限は，

$$\eta_{o+} \sim 2A + C_0^{(1)+}\left(1 + \frac{2i}{\pi}\log\frac{\gamma kr}{2}\right) \qquad (x>0) \qquad kr \to 0$$

となる．

次に，内域解 $\eta_i(x,y)$ の中間極限をとる．

外洋側 $(x>0, r/(\varepsilon\lambda) \to \infty)$ では，図 7-11(b) の対応関係によれば，この極限操作は w 平面における $w \to \infty$ の極限に対応する．この極限において，

$$w \sim \frac{2j}{\varepsilon\lambda}z \qquad (x>0) \qquad r/(\varepsilon\lambda) \to +\infty$$

を得ることに注意すると，内域解 $\eta_i(x,y)$ の中間極限は

$$\eta_i(x,y) \sim \mathrm{Re}\left(D\log\frac{2j}{\varepsilon\lambda}z + F\right) = D\log\frac{2r}{\varepsilon\lambda} + F \qquad (x>0) \qquad r/(\varepsilon\lambda) \to +\infty$$

となる．

次の 2 条件

$$\frac{2i}{\pi}C_0^{(1)+} = D, \quad 2A + C_0^{(1)+}\left(1 + \frac{2i}{\pi}\log\frac{\gamma k}{2}\right) = D\log\frac{2}{\varepsilon\lambda} + F$$

を満たすとき，η_{o+} と η_i の中間極限は恒等的に一致し，漸近接続に成功する．

こうして，漸近接続の四つの条件式を得たので，四つの係数

$$F = A, \quad D = \frac{2i}{\pi}C_0^{(1)+} = -\frac{2i}{\pi}C_0^{(1)-} = \frac{A}{i\pi/2 - \log(\gamma k\varepsilon\lambda/4)}$$

はすべて定まり，内域・外域の解を得る．

特に，解の散乱波は

$$\eta_S^{\pm} = H_0^{(1)}(kr)C_0^{(1)\pm} = \frac{\pm iA}{-i + (2/\pi)\log(\gamma k\varepsilon\lambda/4)}H_0^{(1)}(kr)$$

である．

7-7 $c^2 = [dp/d\rho]_{\rho=\rho_0}$（以下，添え字の$\rho=\rho_0$を省略）

空気を理想気体と近似：$p = (k_B/m)\rho T$

$k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K：ボルツマン定数

断熱過程を仮定：$p/\rho^\gamma =$ 一定

γ は定圧比熱と定積比熱の比 $=7/5$（2 原子分子）

空気を窒素 4，酸素 1 の割合の混合気体として，空気分子の質量を計算すると，

$$m = \frac{(28.0 \times 4 + 32.0)}{5 \times 6.02 \times 10^{23}}$$

$$T = T_0 + t = 273.15 + t$$

$$c = \sqrt{(\gamma k_B/m)(T_0 + t)} = \sqrt{(\gamma k_B/m)T_0}(1 + 0.5t/T_0) + O(t/T_0)^2$$

$$\sim 332 + 0.6t \text{ [m / s]} \qquad t/T_0 \to 0$$

参考文献

漸近級数（第 2 部）および特異摂動法（第 3 部）の一般的テキスト

[1] J.D. Cole, *Perturbation methods in applied mathematics*, Blaisdell, 1968.

[2] Ali Hasan Nayfeh, *Perturbation methods*, John Wiley & Sons, NY, 1973.

[3] A. Erdelyi, *Asymptotic expansions*, Dover Publications, NY, 1956.

[4] Carl M. Bender, Steven A. Orszag, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, McGraw-Hill, 1978.

[5] M. Van Dyke, *Perturbation methods in fluid mechanics*, Academic Press, 1964.

[6] W.A. Wasow *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Wiley, NY, 1965

解析学・微分方程式の基礎

[7] 高木貞治「解析概論」岩波書店, 1961.

[8] 吉田耕作「常微分方程式の解法」岩波書店, 1954.

[9] E. クライツィグ, 北原 訳「技術者のための高等数学 5　常微分方程式」培風館, 1987.

[10] E.L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover Publications, NY, 1956.

関数表

[11] Milton Abramowitz, Irene A. Stegun(Ed.), *Handbook of mathematical functions* , Dover Publications, NY, 1965. (インターネットで公開)

[12] 森口・宇田川・一松「数学公式 III　特殊関数」岩波書店, 1960.

第 1 章 (および 7-9 節)

[13] 柴田正和 「科学随筆–地震波: 海洋波と同一なるもの」自然災害科学 vol.13-1, pp33-38, 日本自然災害学会, 1994.

第 3 章

[14] G.N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, 1966.

[15] ランダウ, リフシッツ, 小林 他訳「統計物理学」岩波書店, 1966.

第 4 章 ([17] ～ [19] は 7-8 節も)

[16] Hermann Schlichting, *Boundary-layer theory*, translated by J. Kestin, McGraw-Hill Book Company, 1968.

[17] G.K. バチェラー, 橋本・一松 訳「入門 流体力学」東京電機大学出版局, 1972.

[18] ランダウ, リフシッツ, 竹内訳「流体力学」東京図書, 1970.

[19] Horace Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, 1932.

[20] P.A. Lagerstrom, J. Kevorkian, "Matched-conic approximation to the two fixed force-center problem " *Astron.J.*, vol.68, pp84-92, 1963.

[21] S. Kuwabara, "The forces experienced by two circular cylinders in a uniform flow at low Reynolds numbers" *J.Phys.Soc.Japan*, vol.12, pp.291-299, 1957.

[22] Y. Kaneda, K. Ishii, "The hydrodynamic interaction of two spheres moving in an unbounded fluid at small but finite Reynolds numbers " *J.Fluid Mech.*, vol.124, pp.209-217, 1982.

[23] P. Vasseur , R.G. Cox, "The lateral migration of spherical particles sedimenting in a stagnant bounded fluid" *J.Fluid Mech.*, vol.80, pp.561-591, 1977.

[24] M. Shibata, Chiang.C. Mei, "Inertia effects of a localized force distribution near a wall in a slow shear flow" *Phys.Fluids*, vol A2(7), pp.1094-1104, 1990.

[25] M. Shibata, *Theoretical modelling of sediment motions under currents and waves*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1987.

[26] 柴田正和 「Rolling-grain ripples の発生の一つの素過程」水工学論文集 vol.37, pp.737-744, 1993.

第 5 章

[27] N. Froman, P.O. Froman, *JWKB Approximation*, North-Holland Publishing Company, 1965.

[28] ランダウ, リフシッツ, 佐々木 訳「量子力学—非相対論的理論 (1)」東京図書, 1983.

[29] 寺沢寛一編 「自然科学者のための数学概論　応用編」岩波書店, 1960.

[30] R. クーラン, D. ヒルベルト, 銀林 訳「数理物理学の方法 2」東京図書, 1959.

[31] Rudolph. E. Langer "On the connection formulas and the solutions of the wave equation" *Phy. Rev.*, vol.51, pp.669-676, 1937.

第 6 章

[32] Ali Hasan Nayfeh, Dean T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley & Sons, NY, 1979.

[33] A. Lindstedt, "Über die Integration einer für die Strörungstheorie wichtigen Differentialgleichung" *Astron, Nach*, vol.103, pp.211-220,1882.

[34] M.J. Lighthill, "A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid" *Phil. Mag.*, vol.40, pp.1202-1223, 1949.

[35] Ali Hasan Nayfeh, "A comparison of three perturbation methods for the earth-moon-spaceship problem" *AIAA J.*, vol.3, pp.1682-1687, 1965.

第 7 章

[36] J.J. Stoker, *Water waves*, Interscience Publishers, Inc., 1957.

[37] Owen M. Phillips, *The dynamics of the upper ocean*, Cambridge University Press, 1977.

[38] M.J. Lighthill, *Waves in Fluids*, Cambridge University Press, 1978.

[39] Chiang.C. Mei, *The applied dynamics of ocean surface waves*, John Wiley & Sons, 1983.

[40] P.Ya. Polubarinova-Kochina, *Theory of ground water movement*, translated by J.M. Roger de Wiest, Princeton University Press, 1962.

[41] V.T. Buchwald, "The diffraction of tides by a narrow channel" *J.Fluid Mech.*, vol.46 pp.501-511, 1971.

[42] 柴田正和「解説–港湾内波浪とその数値シミュレーション」日本造船学会誌 vol.751, pp47-53, 日本造船学会, 1992.

[43] John W S Rayleigh, *The theory of sound*, Dover Publications, NY, 1945.

[44] J. Miles and W. Munk, "Harbour paradox" *Proc.ASCE*, vol.87, WW No. 3, pp.111-130, 1961.

[45] J.J. Lee "Wave-induced oscillations in harbors of arbitrary geometry" *J.Fluid Mech.*, vol. 45, pp.375-394,1971.

[46] J.C.W. Berkhoff "Computation of combined refraction-diffraction" *Proc. 13th Coastal Eng. Conf.*, ASCE, vol.1, pp.471-490, 1972.

[47] A.C. Radder "On the parabolic equation method of water-wave propagation" *J.Fluid Mech.*, vol. 95, pp.159-176, 1979.

[48] C.C. Mei "Numerical Methods in water wave diffraction and radiation" *Annual Rev. Fluid Mech.*, vol.10, pp.393-416, 1978.

あとがき

高校の物理の授業で「笛に共鳴する音波」を学んだとき，恩師は「開口端補正」の生ずる理由を「空気が笛の出口から外に出たことに気づくまで少々時間がかかるから」と説明された．当時の著者は「物理の授業で文学的な解釈をされても困る」と感じたのを覚えているが，後に「開口端補正」を科学的に取り扱うためには 7-8 節にあるような高等数学を駆使しなければならないことを知るにおよび，その説明に納得したものである．

漸近級数および特異摂動法は，アメリカでは理工系学部後期ないし大学院レベルで開講されている．一方，日本の理工系大学院では研究を重視するゆえか，大学院生に対する道具・手段としての応用数学の講義が手薄になっている感が強い．

微分方程式論を始めとする応用数学を使う立場にある著者は，アメリカの大学院 (MIT) で "Methods of Applied Mathematics" という理工系大学院生向けの講義を応用数学の専門家が開講しているのを知りたいそう喜んだ．ところが，爾来二十余年たつにもかかわらず，日本においては一向にこの種のテキストが刊行される気配がなく，あるいは「日本の大多数の学生はこのような方法が存在することすら知らないのではあるまいか？」という危惧が，微分方程式の体系的近似解法への "Introduction" として本書を世に送ることを著者に思い立たせた．

アメリカで著者の目に触れたテキストは，あるいは難解でとっつきにくかったり，テーマが盛りだくさんすぎてポイントがつかみにくいきらいがあったので，本書では大学学部後期学生を念頭におき，要点をしぼり，わかりやすい説明に務めた．

日本の理工系大学 (院) 生また社会人研究者・技術者が，本書を手掛かりにして「微分方程式の体系的近似解法」の存在を認識し，さらに欧米の優れた著作に接することにより知見を深めてゆかれることを期待する．

付表　数学・物理学者年表（本書に登場する主な数学・物理学者ほか）

1571–1630	ケプラー（独）	Johannes Kepler
1596–1650	デカルト（仏）	René Descartes
1623–1662	パスカル（仏）	Blaise Pascal
1640–1708	関孝和（日）	Takakazu Seki
1643–1727	ニュートン（英）	Isaac Newton
1646–1716	ライプニッツ（独）	Gottfried Wilhelm Leibniz
1676–1754	リカッティ（伊）	Jacopo Francesco Riccati
1685-1731	テイラー（英）	Brook Taylor
1692–1770	スターリング（英）	James Stirling
1700-1782	ベルヌイ（スイス）	Daniel Bernoulli
1707-1783	オイラー（スイス）	Leonhard Euler
1736–1813	ラグランジュ（サルディニア・仏）	Joseph Louis Lagrange
1749-1827	ラプラス（仏）	Pierre Simon, marquis de Laplace
1768-1830	フーリエ（仏）	Jean Baptiste Joseph Fourier
1777–1855	ガウス（独）	Johann Carl Friedrich Gauss
1784–1846	ベッセル（独）	Friedrich Wilhelm Bessel
1785–1836	ナヴィエ（仏）	Claude Louis Navier
1788–1827	フレネル（仏）	Augustin Jean Fresnel
1789–1857	コーシー（仏）	Augustin Louis Cauchy
1793–1841	グリーン（英）	George Green
1801–1892	エィリー（英）	George Biddell Airy
1803–1855	シュトゥルム（スイス）	Jacques Charles François Sturm
1804–1851	ヤコビ（独）	Carl Gustav Jacob Jacobi
1809–1882	リゥヴィル（仏）	Joseph Liouville
1819–1903	ストークス（アイルランド）	George Gabriel Stokes
1821-1894	ヘルムホルツ（独）	Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz
1821-1894	チェビシェフ（露）	Pafnuty Lvovich Chebyshev
1826–1866	リーマン（独）	Georg Friedrich Bernhard Riemann
1829–1900	クリストッフェル（独）	Elwin Bruno Christoffel
1839–1873	ハンケル（独）	Hermann Hankel
1842–1912	レイノルズ（英）	Osborne Reynolds
1843–1921	シュバルツ（独）	Karl Hermann Amandus Schwarz
1845–1918	カントール（独）	Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
1849–1917	フロビニウス（独）	Ferdinand Georg Frobenius
1854–1912	ポアンカレ（仏）	Jules Henri Poincaré
1858–1947	プランク（独）	Max Karl Ernst Ludwig Planck
1875–1941	ルベーグ（仏）	Henri Léon Lebesgue
1884–1966	デバイ（蘭）	Peter Joseph William Debye
1887–1961	シュレディンガー（オーストリア）	Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger
1892–1987	ド・ブロイ（仏）	Louis Victor Pierre Raymond de Broglie
1901–1954	フェルミ（伊）	Enrico Fermi
1902–1984	ディラック（英）	Paul Adrien Maurice Dirac
1908–1968	ランダウ（ソ連）	Lev Davidovich Landau

索　引

[さ 行]

著者略歴

柴田　正和（しばた・まさかず）

1949 年　横浜市に生まれる

1967 年　私立麻布高校 卒業

1971 年　東京大学理学部物理学科 卒業

1987 年　マサチューセッツ工科大学 Ph.D.（流体力学）

1989 年　（有）応用数理解析 代表取締役

2003 年　戸塚理数塾 設立

現在に至る

漸近級数と特異摂動法

2009 年 1 月 19 日　第 1 版第 1 刷発行

著　　者　柴田正和

発 行 者　森北博巳

発 行 所　**森北出版株式会社**

東京都千代田区富士見 1–4–11（〒 102–0071）

電話 03–3265–8341 ／ FAX 03–3264–8709

日本書籍出版協会・自然科学書協会・工学書協会　会員

http://www.morikita.co.jp/

JCLS ＜ (株) 日本著作出版権管理システム委託出版物＞

落丁・乱丁本はお取替えいたします　　印刷/モリモト印刷・製本/協栄製本

Printed in Japan /ISBN978–4–627–07631–0